

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬ-
НОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. С. Солодов

**ПРАКТИКУМ ПО ПЛАНИРОВАНИЮ, ПРОВЕДЕНИЮ
И ОБРАБОТКЕ ЭКСПЕРИМЕНТА
В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

*Допущено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия*

**Мурманск
2017**

УДК 658.51:519.8

ББК 30.606 в6

С-60

Солодов, В. С. Практикум по планированию, проведению и обработке эксперимента в исследовании технологических процессов : учеб. пособие по дисциплине «Планирование эксперимента» /В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2017. 152 с. : ил.

В пособии изложены вопросы планирования, проведения и обработки экспериментальных данных, описаны современные статистические методы планирования экспериментов, направленных на построение математических моделей технологических процессов. Рассмотрены методы, применяемые на различных этапах проведения эксперимента, в том числе на этапе обработки априорной информации и проведения натурного эксперимента для построения математической модели объекта, поиска оптимальных параметров объекта. Приводятся планы экспериментов и программы для обработки априорной информации и натурного эксперимента на ЭВМ. Рассмотрены вопросы прогнозирования поведения объекта и определение выходного параметра за пределами диапазона изменения факторов.

Книга рассчитана на аспирантов, изучающих дисциплину «Планирование эксперимента» направления подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (уровень подготовки кадров высшей квалификации) направленность Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами и направления подготовки 15.04.04 Автоматизация технологических процессов и производств (уровень магистратуры). Пособие весьма полезно для научных работников и инженеров, интересующихся методами повышения эффективности экспериментальных исследований в области непрерывных технологических процессов.

Ил. 38, табл. 68, список лит. – 5 названий.

Рецен- Сектор оптических методов Полярного геофизического
зенты: Института (зав. сектором Федоренко Ю.В.);

Ю. Г. Ерофеев, генеральный директор
ООО "МОРГЕОКОМПЛЕКС".

© Мурманский государственный
технический университет, 2017

© В. С. Солодов, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	8
1.1. Общее описание экспериментальных методов.....	8
1.2. Основные этапы и принципы планирования активного эксперимента...	10
1.3. Выбор оптимальных планов эксперимента.....	13
1.4. Простейшие планы первого порядка.....	15
1.5. Планы экспериментов для построения квадратичных моделей.....	21
1.6. Преобразование двухфакторной полиномиальной модели.....	24
1.7. Планирование эксперимента для построения трёхфакторной нелинейной модели.....	26
2. Контрольные вопросы и задания для самопроверки.....	29
3. Рекомендуемая литература.....	30
Практическая работа № 1. Построение полиномиальной модели по априорной информации	31
1. Особенности использования методов планирования активного эксперимента для обработки априорной информации.....	
2. Построение нелинейного полинома по одиночным кривым	
2.1. Пример построения однофакторного нелинейного полинома.....	
2.2. Задание на построение однофакторного нелинейного полинома.....	33
3. Построение двухфакторного линейного полинома.....	
3.1. Пример построения двухфакторного линейного полинома.....	
3.2. Задание на построение двухфакторного линейного полинома	
4. Построение двухфакторного нелинейного полинома по семейству статических характеристик.....	41
4.1. Пример построения двухфакторного нелинейного полинома по семейству статических характеристик.....	
4.2. Задание на построение двухфакторного нелинейного полинома по статическим характеристикам.....	44

5. Построение двухфакторного нелинейного полинома по таблице.....	
5.1. Пример построения двухфакторного полинома по таблице.....	
5.2. Задание на построение двухфакторного нелинейного полинома по таблице.....	
6. Преобразование двухфакторного нелинейного полинома.....	47
6.1. Пример преобразования двухфакторного нелинейного полинома	47
6.2 Задание на преобразование двухфакторного нелинейного полинома...	48
7. Материалы, представляемые на защиту.....	49
8. Контрольные вопросы и задания для самопроверки.....	50
9. Рекомендуемая литература.....	
Практическая работа № 2. Исследование автоколебательного мультивибратора методом планирования активного эксперимента...	51
1. Краткие теоретические сведения.....	
1.1 Принцип работы автоколебательного мультивибратора на операционном усилителе.....	
1.2. Особенности использования МПАЭ для обработки лабораторного Эксперимента.....	
2. Описание объекта исследования.....	
3. Планирование и проведение полного факторного эксперимента	
4. Статистическая обработка эксперимента.....	
4.1. Проверка воспроизводимости опытов.....	
4.2. Расчёт коэффициентов регрессии.....	
4.3. Оценка значимости коэффициентов регрессии.....	
4.4. Оценка адекватности полиномиальной модели.....	
5. Планирование полного факторного эксперимента ПФЭ 2^3	
5.1. Пример построения трёхфакторной полиномиальной модели.....	
5.2. Задание на построение трёхфакторной полиномиальной модели.....	
6. Материалы, представляемые на защиту.....	
7. Вопросы и задания для самопроверки	
8. Рекомендуемая литература	
Практическая работа № 3. Планирование и обработка испытаний судна при движении в свободной воде.....	66
1. Краткие теоретические сведения.....	
1.1. Модель объекта при проведении натурного эксперимента.....	

1.2. Требования к параметрам при проведении натурного эксперимента....	
2. Построение моделей по испытаниям судна в режиме свободного хода....	
2.1. Построение линейных моделей судна в режиме свободного хода.....	
2.2. Планирование и проведение эксперимента.....	
2.3. Проверка воспроизводимости опытов и расчёт коэффициентов.....	
2.4. Примеры построения линейной модели судна.....	
2.5. Планирование эксперимента для построения квадратичных полиномов	
3.Пример использования несимметричного плана эксперимента для построения полиномиальных моделей.....	
4. Задание на выполнение работы.....	
5. Материалы, представляемые на защиту.....	
6. Контрольные вопросы и задания для самопроверки.....	
7. Рекомендуемая литература.....	
Практическая работа № 4. Автоматизация обработки априорной информации и натурного эксперимента.....	93
Введение.....	
1. Краткие теоретические сведения.....	
2. Программы ЭВМ для обработки экспериментальных данных.....	
2.1. Программа «Расчет коэффициентов двухфакторной модели».....	
2.2. Программа «Построение графиков» для двухфакторной модели.....	
2.3. Программа «Расчёт коэффициентов трёхфакторной нелинейной модели».....	
2.4. Программа расчёта значений выходных параметров двухфакторных и трёхфакторных нелинейных моделей.....	
3. Примеры использования ЭВМ для построения нелинейных моделей	
3.1. Примеры построения двухфакторной полиномиальной модели по статической характеристике.....	
3.2. Примеры построения графиков двухфакторной модели.....	
3.3. Пример построения нелинейного полинома по трём параметрам.....	
3.4. Пример расчёта выходных параметров полинома.....	
4. Задание на выполнение работы.....	
5. Материалы, представляемые на защиту	
6. Контрольные вопросы и задания для самопроверки	
7. Рекомендуемая литература.....	

Практическая работа № 5. Построение математических моделей комплекса «судно – трал» по результатам натурного эксперимента...	97
Введение.....	
1. Краткие теоретические сведения.....	
1.1. Модель объекта при проведении натурного эксперимента.....	
1.2. Особенности комплекса «судно-трал» как объекта испытаний	
2. Выбор входных и выходных параметров комплекса.....	
3. Выбор плана и проведение эксперимента.....	
4. Пример построения математической модели комплекса «судно – трал»...	
5. Задание на обработку натурного эксперимента.....	
6. Материалы, представляемые на защиту	
7. Вопросы и задания для самопроверки.....	
8. Рекомендуемая литература.....	
Практическая работа № 6. Поиск оптимальных соотношений параметров методом последовательного симплексного планирования	111
Введение.....	
1. Краткие теоретические сведения.....	
1.1. Принципы симплексного планирования эксперимента.....	
1.2. Движение симплекса в условиях ограничения на параметр.....	
1.3. Геометрическая интерпретация и расчёт координат вершин новых симплексов	
1.4 Достоинства и недостатки симплексного метода настройки систем.....	
2. Пример поиска оптимальных параметров настройки ПСМ.....	
2.1. Поиск оптимальных параметров настройки авторулевого «Аист».....	
2.2. Примеры использования ПСМ для настройки объекта по трём варьируемым параметрам.....	
3. Расчётно-графическое задание.....	
3.1. Содержание задания.....	
3.2. Варианты расчётно-графического задания.....	
4. Материалы, представляемые на защиту	
5. Контрольные вопросы и задания	
6. Рекомендуемая литература.....	
Практическая работа № 7. Прогнозирование поведения управляемого объекта	127

Введение.....	
1. Краткие теоретические сведения.....	
1.1. Виды прогнозирования технического состояния объекта.....	
1.2. Аналитическое прогнозирование.....	
1.3. Применение экспоненциальной функции для прогнозирования технического состояния объекта.....	
2. Применение МПАЭ для прогнозирования технического состояния объекта...	
2.1. Особенности использования МПАЭ для прогнозирования технического состояния объекта при действии фактора – времени.....	
2.2. Примеры построения полиномиальной модели для прогнозирования технического состояния объекта.....	
3. Расчетно-графическое задание 1.....	
3.1. Содержание задания.....	
3.2. Варианты расчетно-графического задания.....	
4. Материалы, представляемые на защиту.....	
5. Контрольные вопросы и задания для самопроверки.....	
6. Рекомендуемая литература.....	
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	

ВВЕДЕНИЕ

В процессе выполнения практических работ обучаемые должны получить чёткое представление об основных этапах планирования, проведения и статистической обработки активного эксперимента. Целью планирования активного эксперимента является выбор числа и условий проведения опытов для получения наибольшей информации с наименьшими затратами труда и представления этой информации в компактной и удобной форме с количественной оценкой её точности.

Учебное пособие включает общую теоретическую часть и семь практических работ. В каждой работе имеются краткие теоретические сведения, задания на выполнение работы, примеры выполнения задания на планирование и статистическую обработку экспериментальных данных.

После каждой практической работы даны вопросы и задания для самопроверки.

В практической работе № 1 «Построение полиномиальной модели по

априорной информации» рассмотрена обработка априорной информации, представленной в графическом виде и в виде таблиц, составленных на основании ранее проведённых натурных испытаний.

В практической работе № 2 «Исследование автоколебательного мульти-вибратора методом планирования активного эксперимента» автор предлагает спланировать и провести лабораторный эксперимент, провести его статистическую обработку.

Практическая работа № 3 «Планирование и обработка экспериментальных данных испытаний судна при движении в свободной воде» посвящена планам первого и второго порядков; реализуется идея шагового поиска при проведении натурного эксперимента.

В практической работе № 4 «Автоматизация обработки априорной информации и натурного эксперимента» рассмотрены программы обработки экспериментальных данных, включающих в себе расчёты коэффициентов двух- и трёхфакторных полиномиальных моделей; построение графиков для двухфакторных моделей, расчёт значений выходных параметров двух- и трёхфакторных моделей.

В практической работе № 5 «Построение математических моделей комплекса «судно – трал» по результатам натурного эксперимента» рассмотрен вопрос планирования эксперимента и обработка результатов при комплексных испытаниях объекта с множеством выходных параметров и сравнительно небольшим количеством независимых факторов, отвечающих требованиям при планировании и реализации активного эксперимента.

Практическая работа № 6 «Поиск оптимальных соотношений параметров методом последовательного симплексного планирования». В работе приводятся координаты исходных симплексов для поиска оптимальных соотношений варьируемых параметров; приводится пример оптимальной настройки авторулевого «Аист».

Практическая работа № 7 «Прогнозирование поведения управляемого объекта» посвящена особенностям планирования эксперимента, одним из факторов которого является время эксплуатации технического объекта.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Общее описание экспериментальных методов

Экспериментальные исследования начинаются со сбора, изучения и анализа всех имеющихся данных об объекте. Априорная информация является той базой, на которой строятся первые шаги исследования. В результате этого предварительного исследования необходимо:

– составить полный список факторов, оказывающих влияние на технологический процесс. При этом следует исходить из того, что лучше назвать несколько малозначащих факторов, чем пропустить один существенно значимый фактор;

- задать ориентировочные пределы изменения факторов с учётом требований их совместимости;
- выбрать выходные параметры в соответствии с поставленной задачей.

Для получения выборочных оценок коэффициентов регрессии можно организовать проведение эксперимента двумя различными способами. Первый способ состоит в том, что исследователь даёт возможность некоторым произвольным образом изменяться условиям, в которых протекает процесс, фиксирует эти условия и соответствующий им результат. Эксперимент, организованный по такой схеме, называется *пассивным*.

Второй способ состоит в том, что экспериментатор изменяет условия по специально разработанной программе и фиксирует только те результаты, которые получены при этих заранее предусмотренных условиях. Эксперимент, организованный по второй схеме, называется *активным*.

Каждый из этих способов имеет свои преимущества и недостатки.

В отличие от пассивного эксперимента *активный* эксперимент предполагает целенаправленное воздействие на объект с целью получения его математического описания. При этом большое внимание уделяется *планированию* эксперимента.

Пассивный эксперимент. В тех случаях, когда по условиям технологического процесса нельзя нарушать режим путем подачи на вход объекта сигналов определенной величины, используют пассивный эксперимент. Метод пассивного эксперимента (методом наблюдений) сводится к регистрации большого числа случайных изменений входных величин $x(t)$ и соответствующих им изменений выходной величины $y(t)$. Для обработки результатов наблюдений используют аппарат корреляционного и регрессионного анализа.

Задачей корреляционного анализа является нахождение линии регрессии по результатам конечного числа наблюдений.

Процесс нахождения линии регрессии сводится к расчету параметров ее уравнения способом наименьших квадратов, сущность которого состоит в минимизации условия

$$\sum_{u=1}^N (Y_u - Y_u^*)^2 = \min, \quad (1.1)$$

т.е. сумма квадратов отклонения экспериментальных значений y_i от значений Y_u^* , рассчитанных по уравнению $Y^* = b_0 + b_1 x$, должно быть наименьшей.

Если исследуется зависимость y от нескольких параметров x , то рассматривается не линия, а плоскость или гиперплоскость регрессии

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k. \quad (1.2)$$

Важно уяснить, что методы корреляционного анализа могут применяться для получения только линейной модели объекта.

Активный эксперимент. Активный эксперимент предполагает целенаправленное воздействие на объект с целью получения математического описания исследуемого процесса или его оптимизации. При этом большое внимание уделяется *планированию* эксперимента.

Цель планирования эксперимента – выбор числа и условий проведения опытов, при котором удастся получить наибольшую информацию – надежную и достоверную – с наименьшими затратами труда и представить эту информацию в компактной и удобной для использования форме с количественной оценкой ее точности.

Преимущества активного эксперимента:

- возможность минимизации количества экспериментов;
- оптимальное использование факторного пространства;
- введение четкой логики для всех процедур, последовательно решаемых экспериментатором;
- организация эксперимента, при которой выполняются исходные предпосылки регрессионного анализа (оценки значимости коэффициентов, адекватности модели);
- оценка элемента неопределенности, связанной с экспериментом, что дает возможность сопоставить результаты, полученные разными исследователями;
- как следствие – резкое повышение контроля точности эксперимента и стимулирование разработки новых инструментальных методов исследования, уменьшающих ошибку воспроизводимости результатов.

При использовании МПАЭ для описания и оптимизации поведения систем используются полиномиальные модели.

Полиномиальная модель весьма удобна для решения практических задач. Описание объекта с помощью такой модели легко уточнить, повышая порядок полинома. Для построения моделей объекта используется четкий алгоритм. Математическая модель, получаемая в результате спланированного эксперимента, описывает наиболее важные (феноменологические) стороны процесса, определяет *количественную* связь между основными параметрами системы. Устраняется избыточность информации, что весьма ценно для управления объектом.

Полиномиальные модели имеют существенную познавательную (эвристическую) ценность, так как позволяют провести их физическую интерпретацию в соответствии с целями исследования. Математические модели удобны для решения с помощью ЭВМ многих задач, вытекающих из взаимодействия элементов системы, прогнозирования его поведения в различных ситуациях, оперативного выбора оптимальных режимов работы.

Наиболее очевидными преимуществами активного эксперимента являются возможности, применять наиболее целесообразно составленные планы, оценки дисперсии ошибки, строго проверить адекватность модели и применять необходимые меры для выполнения условий, необходимых для применения метода множественного регрессионного анализа. Статистическое представление об эксперименте образует основу для исследования сложных объектов и систем. Основными концепциями теории планирования эксперимента являются оптимальное использование *факторного пространства* и *рандомизация* эксперимента. Статистический анализ характеристик экспериментальных моделей показывает, что точность модели существенным образом зависит от выбора условий проведения эксперимента, т. е. является функцией плана эксперимента.

Это означает, что с помощью планирования эксперимента требуемая точность может быть достигнута при минимальном числе опытов, меньших затратах времени, средств на их проведение и обработку результатов.

1.2. Основные этапы и принципы планирования активного эксперимента

Планирование, проведение и обработка результатов эксперимента состоит из следующих обязательных этапов: кодирование факторов; составление план-матрицы эксперимента; рандомизация опытов; реализация плана эксперимента; проверка воспроизводимости опытов; оценка значимости коэффициентов регрессии; проверка адекватности модели.

Под *факторным пространством* понимается область существования входов исследуемой системы в конкретном эксперименте. Границы факторного пространства определены как $X_{i \min} \leq X_i \leq X_{i \max}$ и могут иметь любую конфигурацию (рис. 1.1). Однако далее мы ограничимся только случаем, когда факторное пространство представляет собой k -мерный параллелепипед или эллипсоид (описанный вокруг параллелепипеда или вписанный в него). Такое ограничение факторного пространства при изучении однофакторной зависимости приводит к отрезку прямой на числовой оси фактора X_i , при изучении двухфакторной – к прямоугольнику, трехфакторной – к прямоугольному параллелепипеду и т. д. При $k > 3$ графическое изображение факторного

пространства невозможно, за исключением некоторых особых случаев исследования многокомпонентных смесей. В данной работе такие планы не рассматриваются.

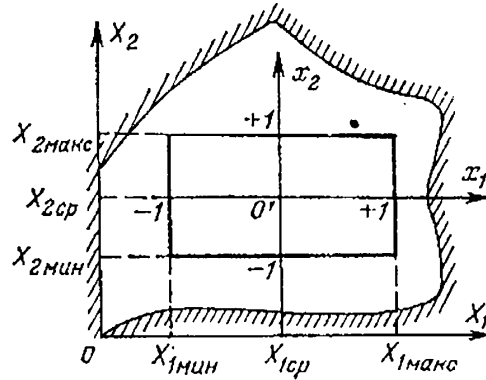


Рис. 1.1. Область определения функции двух переменных в натуральных и кодированных значениях факторов

При планировании эксперимента факторы X_i из натуральных переменных переводятся в *кодированные* $\tilde{x}_i$, как правило, с ограничением $-1 \leq \tilde{x}_i \leq +1$. Кодирование переменных отражает стремление к созданию стандартизированного набора оптимальных планов, не зависящих от структуры объекта исследования. Переход от натуральных переменных к кодированным можно осуществить центрированием факторов, т. е. переносом начала координат системы кодированных факторов x_i в центр эксперимента с координатами в натуральных переменных:

$$X_{0i} = 0,5(X_{i\max} + X_{i\min}). \quad (1.3)$$

Полудиапазон изменения (в литературе его чаще называют диапазоном варьирования) i -го фактора вычисляемого по формуле

$$\Delta X_i = 0,5(X_{i\max} - X_{i\min}). \quad (1.4)$$

Кодированные переменные вычисляются по формуле (1.5), а возврат к натуральным переменным осуществляется по формуле (1.6):

$$\tilde{x}_i = (X_i - X_{0i}) / \Delta X_i; \quad (1.5)$$

$$X_i = \tilde{x}_i \Delta X_i + X_{0i}. \quad (1.6)$$

В качестве нулевого уровня факторов выбирают центр интервала, в котором предполагается вести эксперимент.

Аппроксимирующий полином неизвестной нам в общем случае функции имеет вид

$$Y^* = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \tilde{x}_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j + \sum_{i=1}^K b_{ii} \tilde{x}_i^2 + \dots, \quad (1.7)$$

где коэффициенты $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}, \dots$ являются *оценками* истинных коэффициентов $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}, \beta_{ii}, \dots$ соответственно.

При планировании экспериментов факторы $\tilde{x}_i$ варьируют обычно на двух (принимают значения $+1$ и -1) или на трех уровнях (значения $+1, 0, -1$) через равные интервалы.

При гипотезе линейного влияния на Y одного кодированного фактора $\tilde{x}_1$ рассматривается модель

$$Y^* = b_0 + b_1 \tilde{x}_1,$$

при аналогичной гипотезе для k факторов – модель

$$Y^* = b_0 + b_1 \tilde{x}_1 + b_2 \tilde{x}_2 + \dots + b_k \tilde{x}_k, \quad (1.8)$$

наиболее общим видом локально-интегральной модели является полином степени m от k факторов (1.7).

При решении технических и технологических задач часто достаточно ограничиться полиномом второй степени; значительно реже используются неполные кубические полиномы.

В основе построения полиномиальных моделей лежит *метод наименьших квадратов*. При применении метода наименьших квадратов величиной, характеризующей степень неадекватности значений y_u^* , рассчитываемых по экспериментальным данным, является минимизируемая сумма квадратов

$$\sum_u \Delta_u^2 = \sum_u |y_u - y_u^*|^2. \quad (1.9)$$

Эта величина используется для статистического регрессионного анализа моделей.

Метод наименьших квадратов как инструмент построения полиномиальных моделей позволяет определить *точечные* оценки коэффициентов $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}, \dots$ по экспериментальным данным (с точностью до любой значащей цифры). Однако оцениваемые по результатам измерения случайной величины Y коэффициенты полиномиальной модели сами становятся случайными величинами.

Из этого следуют важнейшие *выводы*:

1) построение модели можно считать законченным, а саму модель использовать для принятия технических решений только после того, как алгеб-

раический расчет оценок коэффициентов $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}, \dots$ и невязок Δ_u будет дополнен статистическим анализом, как отдельных коэффициентов, так и модели в целом;

2) обратное преобразование модели $y = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ в модель вида $\tilde{x}_i = f(y, \tilde{x}_j)$ путем решения квадратного уравнения является некорректным.

1.3. Выбор оптимальных планов эксперимента

Оптимальность планов оценивается по большому количеству критериев, каждый из которых приобретает особую ценность для экспериментатора в зависимости от целей его исследовательской работы. Для обеспечения оптимальности планов используется система специальных критериев, представляющих собой формализованные требования к свойствам моделей. Ниже рассмотрены некоторые из критериев, наиболее важные для решения прикладных задач.

К числу критериев, облегчающих процедуру экспериментов и построение моделей, можно отнести следующее:

а) минимизация числа опытов, т. е. близость числа опытов N к числу оцениваемых параметров модели L .

б) простота вычислений коэффициентов модели, что важно для экспериментатора, не имеющего возможности оперативно обращаться к ЭВМ.

в) композиционность – возможность использовать точки плана первого этапа в плане второго этапа в случае, если модель первого этапа (полином степени m , например, линейный) неадекватно описывает поведение системы (требуется описание полиномом степени $m + 1$, например, квадратичным).

Следует отметить, что нет необходимости в выборе одного какого-либо критерия.

Исходя из особенностей технологических процессов для натуральных испытаний можно рекомендовать следующие планы: полный и дробный факторные эксперименты, ортогональный центральный композиционный план (ОЦКП), несимметричный план типа $M_1 \times M_2$. Для обработки априорной информации в виде таблиц и графиков можно использовать планы: двух- и трёх- факторный ОЦКП, несимметричный план типа $M_1 \times M_2$. для исследования систем вблизи области оптимума рекомендуется использовать рототабельный центральный композиционный план (РЦКП).

Регрессионный анализ математической модели. Доверительные границы коэффициентов можно установить после того, как будут выбраны некоторые фиксированные значения всех коэффициентов регрессии. Для удаления статистически незначимых коэффициентов допускается применение t -критерия. Последовательный регрессионный анализ заключается в следую-

щем: рассчитываются L оценок коэффициентов модели, рассчитываются L оценок $b_{кр}$, удаляется тот эффект b_j , для которого минимально отношение $b_j/b_{кр}$, вновь рассчитываются $L - 1$ оценок коэффициентов модели. Процедура продолжается до тех пор, пока не останется Λ значимых коэффициентов b_j при заданном уровне значимости α . Последовательный регрессионный анализ весьма полезен и для удаления статистически незначимых коэффициентов b_{ii} в моделях, построенных на основе некоторых планов второго порядка, так как способствует их упрощению.

Затем проверяются гипотезы об информационной способности и адекватности полиномиальной модели (со всеми *значимыми* коэффициентами регрессии). При этом используется минимизируемая методом наименьших

квадратов остаточная сумма квадратов $\sum_{u=1}^N \Delta_u^2$, которая обозначается далее $SS_{ост}$, и другие характеристики рассеяния случайных величин.

Обобщенный метод вычисления $SS_{ост}$ по соотношению

$$SS_{ост} = \sum_{u=1}^N y_u^2 - \sum_{i=1}^K b_i (iY) = (YY) - \sum_{i=1}^K b_i (iY). \quad (1.10)$$

Если полиномиальная модель строится по N опытными точкам, содержащим дублирующие опыты ($n_u > 1$) измерения ($m_u > 1$), то можно показать, что $SS_{ост}$ является суммой двух величин

$$SS_{ост} = SS_{на} + SS_{э}, \quad (1.11)$$

где $SS_{на}$ – сумма квадратов отклонений средних экспериментальных значений выходов $\bar{y}_u$ от предсказываемых моделью значений y_u^* ; она характеризует неадекватность модели эксперименту; $SS_{э}$ – сумма квадратов отклонений, связанных с повторением экспериментов; она характеризует точность измерений и воспроизводимость опытов.

Число степеней свободы величин $SS_{ост}$, $SS_{на}$ и $SS_{э}$ зависит от общего числа измерений $N_{общ}$, числа опытных точек N и числа значимых коэффициентов Λ (включая b_0):

$$f_{ост} = N_{общ} - \Lambda; \quad f_{на} = N - \Lambda; \quad f_{э} = N_{общ} - N$$

Зная величины SS_i и соответствующие степени свободы f_i , можно рассчитать оценки дисперсий:

$$s_{\text{ост}}^2 = SS_{\text{ост}} / f_{\text{ост}}; \quad s_{\text{на}}^2 = SS_{\text{на}} / f_{\text{на}}; \quad s_{\text{э}}^2 = SS_{\text{э}} / f_{\text{э}}$$

и проверить по F -критерию Фишера гипотезу об информационной способности и адекватности модели.

Для проверки адекватности модели формируется ноль-гипотеза H_0 : $\sigma_{\text{на}}^2 = \sigma_{\text{э}}^2$. Если она по критерию F_a :

$$F_a = s_{\text{на}}^2 / s_{\text{э}}^2 \quad (1.12)$$

будет признана правдоподобной $F_a < F_{\text{табл}}$ (приложение 3) обычно при $\alpha = 0,05$, то анализируемая модель адекватно описывает результаты эксперимента.

Проверка адекватности по F -критерию абсолютно корректна со статистической точки зрения, однако к ее результатам следует относиться разумно с технических позиций. Возможна такая ситуация, когда модель неадекватна ($F_a > F_{\text{табл}}$) из-за малой ошибки опыта (проводился прецизионный лабораторный эксперимент). В этом случае необходим следующий подход: если $s_{\text{на}}^2$ (как характеристика точности модели) по величине удовлетворяет техническим требованиям, то допустимо заменить $s_{\text{э.лаб}}^2$ на величину $s_{\text{э.пр}}^2$, характеризующую производственные испытания (ошибка производственного эксперимента обычно больше, чем лабораторного), и после этого вновь проверить адекватность модели. Возможна и противоположная ситуация, когда из-за большой величины $s_{\text{э}}^2$ (грубый эксперимент) модель адекватна по F -критерию, но не может удовлетворить исследователя по величине дисперсии неадекватности $s_{\text{на}}^2$. В этом случае к использованию такой модели лучше относиться осторожно.

Точность расчета по полиномиальным моделям зависит от трех параметров: точности эксперимента $S_{\text{э}}$, координат точки предсказания и свойства плана.

1.4. Простейшие планы первого порядка

1.4.1. Полный факторный эксперимент и дробные реплики

Полным факторным экспериментом называется такой эксперимент, при реализации которого определяется значение параметра оптимизации при всех возможных сочетаниях уровней варьирования факторов. Если мы имеем дело с k факторами, каждый из которых может устанавливаться на q уровнях, то для того, чтобы осуществить полный факторный эксперимент, необходимо поставить $n = q^k$ опытов. План (план-матрица) для $k = 2$ и $q = 2$ приведен в табл. 1.1.

Таблица 1.1

План ПФЭ 2^2

Опыт	$\tilde{X}_1$	$\tilde{X}_2$
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Основными преимуществами ПФЭ являются:

- раздельная (независимая) оценка коэффициентов регрессии;
- симметричность относительно центра эксперимента, означающая, что алгебраическая сумма элементов вектора-столбца каждого фактора равна нулю.

Проведение эксперимента. Ввиду того что на процесс оказывают влияние не только x_1 и x_2 , но еще ряд факторов, которые могут быть вообще неизвестны исследователю, чтобы внести элемент случайности влияния этих факторов на результат эксперимента, устанавливается случайный порядок постановки опытов во времени. Это необходимо для обоснованного использования аппарата математической статистики и для исключения систематической ошибки. Эта процедура называется рандомизацией. Для ее осуществления пользуются таблицами случайных чисел (приложение 3.4).

План ПФЭ 2^2 и расчетная матрица представлены в табл. 1.2. Приведенный план представляет собой расширенную матрицу, так как введен столбец X_1X_2 , позволяющий оценить коэффициент регрессии при взаимодействии факторов b_{12} .

Таблица 1.2

План ПФЭ 2^2 и расчетная матрица

Опыт u	$\tilde{X}_1$	$\tilde{X}_2$	$\tilde{X}_1\tilde{X}_2$	y_{u1}	y_{u2}	$\bar{y}_u = \frac{y_{u1} + y_{u2}}{2}$
1	-1	-1	+1	y_{11}	y_{12}	$\bar{y}_1$

2	+1	-1	-1	y_{21}	y_{22}	$\bar{y}_2$
3	-1	+1	-1	y_{31}	y_{32}	$\bar{y}_3$
4	+1	+1	+1	y_{41}	y_{42}	$\bar{y}_4$

Проверка воспроизводимости опыта. При одинаковом числе параллельных опытов на каждом сочетании уровней факторов воспроизводимость процесса проверяется по критерию Кохрена:

$$G = \frac{s_{u \max}}{\sum_{u=1}^n s_u^2} \leq G_{(0,05; f_n f_u)}, \quad (1.13)$$

где $s_u^2 = \frac{\sum_{p=1}^m (y_{u_p} - \bar{y}_u)^2}{m-1}$ – дисперсия, характеризующая рассеяние результатов опытов на u -м сочетании уровня факторов; $p = 1, 2, \dots, m$ – число параллельных опытов; $s_{u \max}^2$ – наибольшая из дисперсий в строках плана; $G_{(0,05; f_n, f_u)}$ – табличное значение критерия Кохрена при 5 %-ном уровне значимости; $f_n = n$ – число независимых оценок дисперсии; $f_u = m-1$ – число степеней свободы каждой оценки.

В статистике всякая выборочная дисперсия связана с числом, называемым числом степеней свободы f . Это число f равно разности между числом различных опытов, по которому оценивалась дисперсия, и числом констант, найденных по тем же самым опытам независимо друг от друга и используемых при оценке дисперсии.

Процесс считается воспроизводимым, если выполняется неравенство (1.13). При этом дисперсия воспроизводимости (ошибка опыта) определяется по формуле

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n s_u^2.$$

Если неравенство (1.13) не выполняется, то необходимо принять меры к уточнению измерений в опыте с максимальной дисперсией.

Опыты, повторенные несколько раз при одних и тех же значениях факторов, называют параллельными. Под дублированием понимают постановку параллельных опытов. Обычно число n параллельных опытов принимают равным 2 – 3.

При равномерном дублировании все строки матрицы планирования имеют одинаковые числа параллельных опытов. В случае неравномерного дублирования числа параллельных опытов неодинаковы. При отсутствии дублирования параллельные опыты не проводятся. Наиболее предпочтительным из трех вариантов дублирования является первый. При этом варианте эксперимент отличается повышенной точностью, а математическая обработка экспериментальных данных – простотой. Характер дублирования опытов влияет на содержание математической обработки результатов наблюдений.

В рассматриваемом примере (табл. 1.2) выполнялись по два определения величины y_u . Поэтому значение оценок дисперсии в каждой точке плана можно рассчитывать по формуле

$$s_u^2 = \Delta^2 / 2, \quad (1.14)$$

где Δ – разность между параллельными опытами.

В случае воспроизводимости процесса рассчитывают коэффициенты регрессии

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n \bar{y}_u; \quad b_i = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} \bar{y}_u; \quad b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u. \quad (1.15)$$

Проверка адекватности линейной модели выполняется с помощью F -критерия Фишера. Адекватность не отвергается, если выполняется неравенство

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2} \leq F_{(0,05; f_{ад}; f_y)}, \quad (1.16)$$

где $s_{ад}^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - y_u)^2}{n - k - 1}$; y_u – расчетное значение отклика в u -м опыте;

$F_{(0,05; f_{ад}; f_y)}$ – критерий Фишера при 5 %-м уровне значимости;

$f_{ад} = n - k - 1$ – число степеней свободы дисперсии воспроизводимости.

Оценка значимости коэффициентов регрессии производится с помощью критерия Стьюдента.

Коэффициент считается значимым, если выполняется неравенство

$$|b_i| \geq \Delta b_i = t_{(0,05; f_y)} (s_y / \sqrt{n}), \quad (1.17)$$

где $t_{(0,05; f_y)}$ – 5 %-я точка распределения критерия Стьюдента с f_y степенями свободы.

Незначимый коэффициент при факторе означает, что данный фактор не влияет (или влияет незначимо) на выходной параметр. Однако на величину коэффициента регрессии влияет не только роль данного фактора, но также выбранный интервал варьирования. Это значит, что при очень узких пределах изменения фактора в эксперименте его вклад в изменение выходного параметра может быть действительно очень малым.

Косвенной оценкой правомерности использования линейного плана являются дополнительные опыты в центре эксперимента.

Сумма всех коэффициентов при квадратичных членах

$$\sum b_{ii} = |b_0 - y_0|, \quad (1.18)$$

где y_0 – среднее значение параметра оптимизации, полученное из опытов на нулевом уровне факторов.

Если выполняется неравенство $|b_0 - y_0| < t_{(0,05;f_y)}$, то можно полагать, что суммарный вклад квадратичных эффектов равен нулю. Эта проверка не является абсолютной, так как возможен вариант, при котором сумма положительных коэффициентов при квадратичных членах будет равна сумме отрицательных.

Ниже приводятся планы и общий вид уравнений регрессии, которые могут быть построены при реализации этих планов.

В табл. 1.3 приведена расширенная матрица планирования для трех факторов ($k = 3$), варьируемых на двух уровнях ($q = 2$). Матрица планирования эксперимента типа ПФЭ 2^3 (табл. 1.3) получена из табл. 1.2 путем двукратного повторения ее дважды: один раз повторяется при x_3 на нижнем уровне и второй раз – при x_3 на верхнем уровне.

Таблица 1.3

**Расширенная матрица планирования полного
факторного эксперимента типа 2^3**

Опыт <i>и</i>	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$
1	–	–	–	+	+	+	–
2	+	–	–	–	–	+	+
3	–	+	–	–	+	–	+
4	+	+	–	+	–	–	–
5	–	–	+	+	–	–	+
6	+	–	+	–	+	–	–
7	–	+	+	–	–	+	–
8	+	+	+	+	+	+	+

По результатам плана, представленного в табл.1.3, можно определить восемь коэффициентов регрессии в уравнении

$$\hat{y} = b_0 + b_1\tilde{x}_1 + b_2\tilde{x}_2 + b_3\tilde{x}_3 + b_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + b_{13}\tilde{x}_1\tilde{x}_3 + b_{23}\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + b_{123}\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \quad (1.19)$$

т. е. столько же, сколько опытов в матрице планирования – план является насыщенным. Для оценки адекватности модели необходимо пренебречь каким-либо из взаимодействий, например $x_1 x_2 x_3$, и поставить опыты в центре эксперимента для проверки значимости эффекта квадратичных членов. Если модель в виде неполного квадратного уравнения неадекватна или эффект от квадратичных членов значим, то согласно *идее шагового поиска* необходимо продолжить эксперимент с целью представления функции отклика квадратным уравнением.

Заметим, что при сопоставлении планов для различных значений k включение каждого нового фактора приводит к удвоению числа опытов в плане: при $k = 4$ число опытов $n = 16$, при $k = 5$ $n = 32$ и т. д. Реализация таких планов становится трудоемкой, дорогостоящей и требует больших затрат времени. Это обстоятельство привело к идее *дробного факторного эксперимента* (ДФЭ).

Если влияние некоторого взаимодействия признается пренебрежимо малым, то естественно, что коэффициент регрессии при таком взаимодействии не будет значимо отличаться от нуля. Это дает возможность использовать соответствующий столбец расширенной матрицы для оценки влияния дополнительного фактора.

Например, при проведении эксперимента с двумя факторами эффект взаимодействия $x_1 x_2$ оказался близким к нулю. Воспользуемся этим обстоятельством для проверки влияния на процесс еще одного – третьего фактора. План эксперимента остается таким же, как и в таблице 1.2, с той лишь разницей, что столбец $x_1 x_2$ означает уровни фактора x_3 (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Дробный факторный план 2^{3-1}

Опыт u	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2$
1	–	–	+
2	+	–	–
3	–	+	–
4	+	+	+

В соответствии с табл. 1.5 было проведено четыре опыта. По ним можно оценить влияние трех линейных эффектов. Если бы при $k = 3$ был поставлен полный факторный эксперимент, то необходимо было бы поставить восемь опытов, т. е. в два раза больше. Если коэффициенты при взаимодействиях не равны нулю, то найденные по результатам опытов выборочные коэффициенты регрессии будут оценками для совместных эффектов:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}. \quad (1.20)$$

Таблица 1.5

Расширенная матрица типа 2^{3-1}

Опыт <i>u</i>	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$
1	–	–	+	+	–	–	+
2	+	–	–	–	–	+	+
3	–	+	–	–	+	–	+
4	+	+	+	+	+	+	+

1.4.2. Интерпретация результатов факторного эксперимента

Проведя серию опытов по плану ПФЭ или дробной реплики, приходим в результате к полиномиальной модели. Если полученная модель оказывается адекватной экспериментальным данным, то ее можно использовать для прогнозирования значения отклика при любых значениях факторов, находящихся между верхним и нижним уровнями. Для этого, прежде всего, необходимо значения факторов перевести в кодовую форму по формуле (1.5).

Подставив $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ в уравнение (1.19), получим искомое значение выходной величины (отклика) для выбранных значений факторов.

С помощью формулы (1.6) уравнение (1.19) можно привести к натуральным переменным.

Коэффициенты регрессии в линейной модели дают представление о том, на сколько изменится значение отклика, если фактор изменить на величину одного интервала варьирования ΔX .

1.5. Планы экспериментов для построения квадратичных моделей

Ввиду наличия нелинейной зависимости ряда выходных параметров рассматриваемого судового комплекса, рассмотрим планы, позволяющие

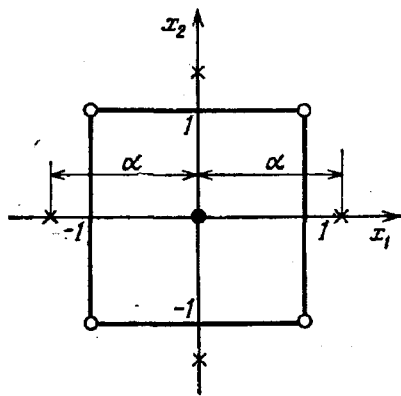
строить нелинейные математические модели. Для построения такой модели необходимо, чтобы каждый фактор варьировал хотя бы на трех уровнях.

Простейшим решением можно назвать планирование типа 3^k , но реализация такого плана приведет к необходимости проведения большого числа опытов, если число факторов $k \geq 3$.

1.5.1. Ортогональное планирование

Преимущество ортогональных планов состоит в малом объеме вычислений, а также в том, что все коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга.

а



б

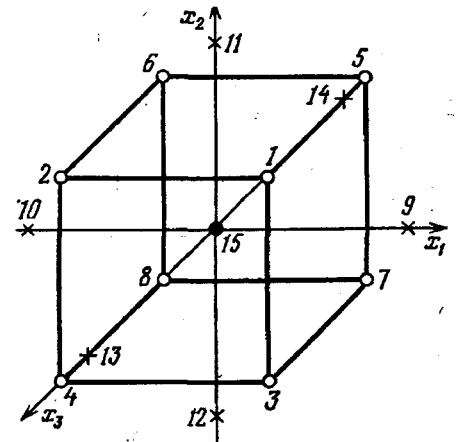


Рис. 1.2. Композиционный план второго порядка

а – для $k = 2$, б – для $k = 3$

Модели, построенные по этим планам, при $k = 2$ имеют вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \tilde{x}_1 + b_2 \tilde{x}_2 + b_1 \tilde{x}_1^2 + b_2 \tilde{x}_2^2 + b_{12} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \quad (1.21)$$

или при $k = 3$

$$\begin{aligned} \hat{y} = & b_0 + b_1 \tilde{x}_1 + b_2 \tilde{x}_2 + b_{11} \tilde{x}_1^2 + b_{22} \tilde{x}_2^2 + b_{33} \tilde{x}_3^2 + b_{12} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \\ & + b_{13} \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + b_{23} \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \end{aligned} \quad (1.22)$$

На первом этапе реализуют серию опытов для построения линейной модели. В задаче с двумя переменными – это опыты в четырех точках. При трех переменных можно поставить полуреплику. Затем ставят опыт в центре плана. Если модель оказалась неадекватной, полуреплику достраивают до полного факторного эксперимента, т. е. реализуют опыты во всех вершинах куба. Затем ставят еще несколько опытов в точках, расположенных на расстоянии d от центра, это так называемые звездные точки. При построении плана второго порядка область эксперимента расширяется. Итак, получен

композиционный план второго порядка при $k = 2$, содержащий 9 опытов. При $k = 3 - 15$ опытов. Если бы был применен план типа 3^3 , то потребовалось бы поставить 27 опытов.

Построение центрального композиционного плана при наличии ядра сводится к наращиванию точек, расположенных в центре плана (на нулевом уровне факторов) и на расстоянии d от центра.

Для того чтобы сохранить ортогональность плана, необходимо при построении матрицы планирования второго порядка обеспечить выполнение двух условий:

$$\sum_{u=1}^n x_{0u} x_{iu}^2 = 0 \text{ и } \sum_{u=1}^n x_{iu}^2 x_{ju}^2 = 0 \quad (1.23)$$

Если выполняется условие (1.23), то матрица центрального композиционного плана ортогональна.

Обеспечив ортогональность плана, получим возможность определения коэффициентов регрессии по весьма простой формуле и независимо друг от друга:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^n x_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^n x_{iu}^2} \quad (1.24)$$

где i – номер столбца в матрице планирования; x_{iu} – элементы i -го столбца.

Ниже приводятся параметры ортогональных планов второго порядка, используемых в данном учебном пособии.

Таблица 1.6

Параметры ортогональных планов второго порядка

Ядро плана	Общее число опытов n	ϕ	d
2^2	9	$2/3 \approx 0,6667$	1,0000
2^3	15	$\sqrt{\frac{8}{15}} \approx 0,7303$	1,2154

Примечание. Заметим, что при $k = 2$ звездное плечо $d = 1$. Это значит, что матрица планирования двухфакторного эксперимента является целочисленной.

Ортогональный центральный композиционный план второго порядка для $k = 2$ приведен в табл. 1.7. Знаменатель в формуле (1.24) не зависит от результатов опытов, поэтому его можно вычислить заранее, что упрощает обработку результатов эксперимента.

Ортогональный центральный композиционный план (ОЦКП)

второго порядка для $k = 2$

Опыт u	$\tilde{x}_0$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1^2 - \varphi$	$\tilde{x}_2^2 - \varphi$	$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2$	y
Планирование типа 2	+1	-1	-1	1/3	1/3	+	y_1
	+1	+1	-1	1/3	1/3	-	y_2
	+1	-1	+1	1/3	1/3	-	y_3
	+1	+1	+1	1/3	1/3	+	y_4
Звездные точки	+1	-1	0	1/3	-2/3	0	y_5
	+1	+1	0	1/3	-2/3	0	y_6
	+1	0	-1	-2/3	1/3	0	y_7
	+1	0	+1	-2/3	1/3	0	y_8
Нулевая точка	+1	0	0	-2/3	-2/3	0	y_9

Расчёт коэффициентов полинома производится по формулам :

$$b_0 = (1/9) \sum_{u=1}^9 y_u - 2/3(b_{11} - b_{22}); \quad b_{ii} = (1/2) \sum_{u=1}^9 (x_{iu} - 2/3)y_u; \quad (1.25)$$

$$b_i = (1/6) \sum_{u=1}^9 x_{iu} y_u; \quad b_{ij} = 1/4 \sum_{i \neq j} x_{iu} x_{ju} y_u.$$

Дисперсии коэффициентов для плана ОЦКП определяется по формулам:

$$s^2\{b_0\} = \frac{5}{9} s_y^2; \quad s^2\{b_1\} = s^2\{b_2\} = \frac{s_y^2}{6};$$

$$s^2\{b_{11}\} = s^2\{b_{22}\} = \frac{s_y^2}{2}; \quad s^2\{b_{12}\} = \frac{s_y^2}{4}, \quad (1.25, a)$$

Коэффициенты значимо отличаются от нуля, если выполняется неравенство

$$|b| > t s\{b\}.$$

Для рассмотренных в работе планов значения $\sum_{u=1}^n x_{iu}^2$ приведены в табл.

Таблица 1.8

Значения $\sum_{u=1}^n x_{iu}^2$ для ортогональных планов второго порядка

для $k = 2$ и $k = 3$

Столбец в матрице планирования	Значение $\sum_{u=1}^n x_{iu}^2$ при ядре типа	
	2^2	2^3
x_0	9	15
x_1	6	10,9544
x_{ij}	4	8
$x_i^{2-\varphi}$	2	4,364

Следует отметить, что величины $\sum_{u=1}^n x_{iu}^2$ различны для разных столбцов (табл.1.8). Например, для первого столбца она равна 9, для второго и третьего – 6, для четвертого и пятого – 2, для шестого – 4.

Иначе говоря, коэффициенты квадратичного полинома (уравнения регрессии второго порядка) определяются по ортогональному плану с различными дисперсиями, т. е. неравноточными. Это обстоятельство приводит к необходимости поиска других планов в тех случаях, когда s_y^2 велико.

1.6. Преобразование двухфакторной полиномиальной модели

Преобразование полиномиальной модели производится для определения управляющего воздействия на объект при заданном значении управляемой величины.

Предположим, что непосредственно из эксперимента получен полином

$$Y = b_0 + b_1 \tilde{x}_1 + b_2 \tilde{x}_2 + b_{12} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + b_{11} \tilde{x}_1^2 + b_{22} \tilde{x}_2^2. \quad (1.26)$$

Для управления процессом недостаточно иметь полином такого вида.

Например, известны мощность главной энергетической установки и располагаемая мощность на гребном валу с учётом отбора мощности на судовые нужды. Необходимо определить положение вариатора управления шагом винта при движении судна в заданных условиях плавания. Судоводителю промыслового судна часто приходится решать задачу определения положения ВУШ при заданной глубине хода трала h и длине вытравленных ваеров L_v с целью поднятия трала на небольшую глубину или определить длину вае-

ров при заданной глубине хода трала и неизменном значении ВУШ или скорости судна.

Требуется найти зависимость одного из управляющих воздействий от выходного параметра Y и $k-1$ варьируемых параметров.

$$\tilde{x}_i = f(\tilde{x}_j, Y). \quad (1.27)$$

Для нахождения зависимости типа (1.27) варьируем величины Y и x_j на нескольких уровнях, предусмотренных планом эксперимента, и таким образом производим сечение факторного пространства плоскостями $\tilde{Y} = 0$; $\tilde{Y} = \pm 1$; $\tilde{x}_j = 0$; $\tilde{x}_j = \pm 1$. Уравнение (1.26) приводим к виду

$$b_{ii}\tilde{x}_i^2 + b'_{iu}\tilde{x}_i + b'_{ou} - Y_u = 0$$

или к виду

$$A\tilde{x}_{iu}^2 + Bx_{iu} + C_u' - Y_u = 0,$$

где $u = 1, 2, \dots, 9$ – номер точки (опыта) $u = 1, 2, \dots, 9$.

$$\tilde{x}_{iu} = -\frac{b'_{iu}}{2b_{ii}} \pm \sqrt{\frac{1}{b_{ii}} \left\{ Y_u - \left[b'_{ou} - \frac{(b'_{iu})^2}{4b_{ii}} \right] \right\}} \quad (1.28)$$

Здесь $\tilde{x}_{iu}$ – кодированное значение искомого управляющего воздействия при u -м сочетании уровней x_j и Y .

При $k = 2$ имеем

$$\begin{aligned} b'_{ou} = C' &= b_0 + b_j\tilde{x}_{ju} + b_{jj}\tilde{x}_{ju}^2; \\ b'_{iu} &= B = b_i + b_{ij}\tilde{x}_{ju} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ранее было отмечено, что коэффициенты модели, полученные экспериментальным путём, являются случайными и нахождение корней путём решения квадратного уравнения является некорректным. Предлагается решить эту проблему итерационным методом.

Формула вычисления корней полинома итерационным методом имеет вид

$$\tilde{x}_{iu} = \frac{Y_u - b'_{ou}}{b'_{iu} + b_{ii}\tilde{x}_{iu-1}}. \quad (1.30)$$

Определив значения $\tilde{x}_{iu}$ для девяти соотношений Y_u и x_{ju} , заполняем таблицу ОЦКП для двух факторов. Используя формулы для определения коэффициентов, находим искомый полином.

1.7. Планирование эксперимента для построения трёхфакторной нелинейной модели

1.7.1. Ортогональное планирование. План эксперимента и расчётная матрица ОЦКП для $k = 3$ приведены в табл. 1.9.

Таблица 1.9

План эксперимента и расчётная матрица ОЦКП для $k=3$

Опыт u	x_1	x_2	x_3	$x_1^2 - \frac{11}{15}$	$x_2^2 - \frac{11}{15}$	$x_3^2 - \frac{11}{15}$	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	Y_u
1	-1	-1	-1	4/15	4/15	4/15	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	-1	4/15	4/15	4/15	-1	-1	+1	y_2
3	-1	+1	-1	4/15	4/15	4/15	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	-1	4/15	4/15	4/15	+1	-1	-1	y_4
5	-1	-1	+1	4/15	4/15	4/15	+1	-1	-1	y_5
6	+1	-1	+1	4/15	4/15	4/15	-1	+1	-1	y_6
7	-1	+1	+1	4/15	4/15	4/15	-1	-1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	4/15	4/15	4/15	+1	+1	+1	y_8
9	-1,215	0	0	23/30	-11/15	-11/15	0	0	0	y_9
10	+1,215	0	0	23/30	-11/15	-11/15	0	0	0	y_{10}
11	0	-1,215	0	-11/15	23/30	-11/15	0	0	0	y_{11}
12	0	+1,215	0	-11/15	23/30	-11/15	0	0	0	y_{12}
13	0	0	-1,215	-11/15	-11/15	23/30	0	0	0	y_{13}
14	0	0	+1,215	-11/15	-11/15	23/30	0	0	0	y_{14}
15	0	0	0	-11/15	-11/15	-11/15	0	0	0	y_{15}

Аппроксимирующий трёхфакторный полином имеет вид (1.22).

Формулы расчёта коэффициентов модели (1.31)

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^n Y_u}{15}; \quad b_i = \frac{\sum_{u=1}^n X_{iu} Y_u}{10,9544}; \quad (1.31)$$

$$b_{ii} = \frac{\sum_{u=1}^n X_{iu}^2 Y_u}{4,364}; \quad b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^n X_{iu} X_{ju} Y_u}{8}.$$

Пользуясь формулами (1.31) и данными табл. 1.9, определяют значения коэффициентов регрессии по результатам опытов Y_u .

Адекватность модели проверяют по формуле (1.16).

В случае, когда полином неадекватен, необходимо повысить степень полинома с помощью ортогональных планов Чебышева либо с помощью плана третьего порядка.

1.7.2. Ротатабельное планирование. В отличие от ортогональных планов ротатабельные планы дают возможность предсказывать значения функ-

ции отклика с дисперсией, одинаковой на равных расстояниях от центра плана. Эта особенность ротатабельных планов служит критерием для оценки их качества.

Конструирование ротатабельных планов так же, как и ортогональных второго порядка, заключается в прибавлении точек к ядру и на расстоянии d от центра. В этом случае звездное плечо d выбирается из условия инвариантности плана к вращению.

План Бокса – Бенкина (BB3). План почти ротатабельный. Для статистической оценки проводятся три опыта в центре плана. Матрица плана в каждом опыте имеет отличные от нуля только два фактора, что весьма удобно для его реализации (табл.1.10). Общее число опытов для $k = 3$ составляет

$$N_{\text{общ}} = N + n_0 = 12 + 3 = 15.$$

План некомпозиционный, рекомендуется при проведении комплексных испытаний, когда при одной серии опытов фиксируется несколько выходных параметров, связанных с входными факторами линейной и квадратичной зависимостью.

Таблица 1.10

План Бокса – Бенкина для $k = 3$

Опыт u	План			Результат y_u	Опыт u	План			Результат y_u
	$\tilde{X}_1$	$\tilde{X}_2$	$\tilde{X}_3$			$\tilde{X}_1$	$\tilde{X}_2$	$\tilde{X}_3$	
1	–	–	0	y_1	9	0	–	–	y_9
2	+	–	0	y_2	10	0	+	–	y_{10}
3	–	+	0	y_3	11	0	–	+	y_{11}
4	+	+	0	y_4	12	0	+	+	y_{12}
5	–	0	–	y_5	13	0	0	0	y_{13}
6	+	0	–	y_6	14	0	0	0	y_{14}
7	–	0	+	y_7	15	0	0	0	y_{15}
8	+	0	+	y_8					

Коэффициенты квадратичного полинома и ошибки их определения рассчитываются по формулам (1.32):

$$\begin{aligned} b_0 &= y_{0u}; \quad S\{b_0\} = T_6 S_y; \\ b_i &= T_2(iY); \quad S\{b_i\} = T_7 S_y; \\ b_{ii} &= T_3(iiY) + T_4 \sum (iiY) - T_1(0Y); \quad S\{b_{ii}\} = T_8 S_y; \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$b_{ij} = T_5(ijY); \quad S\{b_{ij}\} = T_9 S_y.$$

В формулах (1.32) обозначены:

(0Y) – сумма измеренных значений выходного параметра по всем 13 опытам;

(iY) – сумма произведений выходного параметра на соответствующий столбец плана эксперимента;

(iiY) – сумма произведений выходного параметра на квадраты столбцов плана эксперимента;

(ijY) – сумма произведений, характеризующих эффект взаимодействия факторов.

Расчет коэффициентов модели удобнее проводить с помощью бланка – алгоритма, т. е. табличным методом или с помощью ЭВМ.

По результатам трёх опытов определяют коэффициент b_0 . Затем определяют коэффициенты полинома (линейные эффекты b_i , квадратичные эффекты b_{ii} и эффекты взаимодействия b_{ij} по окончательным формулам путем подстановки соответствующих сумм граф).

Таблица 1.11

Расчётные коэффициенты T_i^5 для плана Бокса – Бенкина при $k = 3$

Коэффициент	Значение коэффициента	Коэффициент	Значение коэффициента
T_1	50 000	T_6	100 000
T_2	12 500	T_7	35 355
T_3	50 000	T_8	66 150
T_4	18 750	T_9	50 000
T_5	25 000		

После определения коэффициентов математической модели проводится ее регрессионный анализ, в ходе которого оценивается среднеквадратичная ошибка воспроизводимости эксперимента, ошибки в определении коэффициентов регрессии. Проводится анализ значимости коэффициентов регрессии, проверяется гипотеза об адекватности полиномиальной модели со всеми значимыми коэффициентами регрессии.

Математическое описание семейства кривых. Для обработки априорной информации, заложенной в виде семейства статических характеристик или в виде таблиц, могут быть использованы ОЦКП и планы типа $M_1 \times M_2 \times M_3$. Характерной чертой таких планов является то, что факторы X_i меняются на m_i уровнях через равные интервалы (см. табл. 2.1), что существенно упрощает построение моделей с кодированными факторами. Для расчета оценок коэффициентов b_0, b_i, b_{ii} и b_{ij} , рассчитанных по плану типа $M_1 \times M_2 \times M_3$, используются следующие формулы, обоснование которых дано в работе 13 [1]:

$$\begin{aligned}
b_0 &= A_0(0Y) - \sum A_{0i}(iiY); \quad s\{b_0\} = \sqrt{A_0} \cdot s_y; \\
b_i &= A_i(iY); \quad s\{b_i\} = \sqrt{A_i} \cdot s_y; \\
b_{ij} &= A_{ij}(ijY); \quad s\{b_{ij}\} = \sqrt{A_{ij}} \cdot s_y; \\
b_{ii} &= A_{ii}(iiY) - A_{0i}(0Y); \quad s\{b_{ii}\} = \sqrt{A_{ii}} \cdot s_y.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

В табл. 1.12–1.13 приведены значения коэффициентов A_i .

Таблица 1.12

Значения постоянных $A \cdot 10^5$ для расчёта коэффициентов регрессии при симметричных планах с числом опытов до $N = 49$

План	N	A_0	A_{0i}	A_i	A_{ii}	A_{ij}
3×3	9	55556	33333	16667	50000	25000
4×4	16	25 781	17 578	11 250	31 641	20 250
5×5	25	15 429	11 429	8 000	22 857	16 000
6×6	36	10 373	8 138	5 952	17 439	12 755
7×7	49	7 483	6 122	4 592	13 776	10 332

3×3×3	27	25 926	11 111	5 556	16 667	8 333
4×4×4	64	8 888	4 394	2 812	7 910	5 062
5×5×5	125	4 228	2 286	1 600	4 571	3 200

Таблица 1.13

Значения постоянных $A \cdot 10^5$ для расчёта коэффициентов регрессии при несимметричных планах

План	A_0	A_{01}	A_{02}	A_1	A_2	A_{11}	A_{22}	A_{12}
2×3	50 000	0	50 000	16 667	25 000	0	75 000	25 000
2×4	32 031	0	35 156	12 500	25 500	0	63 281	22 500
2×5	24 286	0	28 571	10 000	20 000	0	57 143	20 000
3×4	38 021	25 000	23 438	12 500	15 000	37 500	42 188	22 500
3×5	29 524	20 000	19 048	10 000	13 333	30 000	38 095	20 000

2. Контрольные вопросы и задания для самопроверки

1. Что понимается под моделью процесса с точки зрения кибернетики?
2. В чём заключается идея шагового поиска?

3. Какова процедура проверки адекватности модели? Что является критерием её адекватности?
4. Что такое активный эксперимент и каковы его цели?
5. Приведите примеры количественных и качественных факторов в инженерной практике
6. Назовите основные требования, предъявляемые к факторам и их совокупности.
7. Что означает совместимость факторов? Приведите пример несовместимости факторов в исследовании технологических процессов.
8. В чём заключается требование некоррелированности факторов?
9. Какие требования предъявляются к параметру оптимизации?
10. Какова основная цель сбора априорной информации о процессе?
11. Что называется полным факторным экспериментом?
12. При каких условиях можно использовать дробный факторный эксперимент ?
13. Назовите основные этапы проведения и обработки результатов полного факторного эксперимента.
14. По какому критерию оценивается воспроизводимость опытов?
15. Что такое адекватность модели, и по какому критерию она оценивается?
16. Назовите основные достоинства и недостатки ортогональных планов?
17. Назовите основные достоинства и недостатки ротатабельных планов?
18. Что означает композиционность плана и как это свойство используется при планировании эксперимента?

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Солодов, В. С. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2012. – 204 с.
2. Солодов, В. С. Идентификация комплекса судно-трал методами планирования активного эксперимента : монография / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2008. – 248 с. : ил.
3. Калитёнков, Н. В. Надёжность и диагностика транспортного радиооборудования и средств автоматики / Н. В. Калитёнков, В. С. Солодов : Учеб. пособие. – Москва : МОРКНИГА, 2012. – 521 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПО АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

1. Особенности использования методов планирования активного эксперимента для обработки априорной информации

Успешность применения методов математической теории эксперимента при решении технических задач в значительной степени зависит от того, *насколько полно учтена* при постановке задачи моделирования *априорная информация*.

В условиях роста числа публикаций весьма важно так представить имеющуюся печатную информацию (большинство статей, книг, отчетов содержат графики и таблицы, характеризующие влияние X_i на выходной параметр Y), чтобы она приняла вид, удобный для разработки собственных экспериментов.

Особенностью построения математических моделей по априорной информации является то, что объектом исследования является не сам процесс, а статические характеристики, описывающие этот процесс в установившемся режиме. При этом выходная величина Y определяется практически без ошибки, и результаты каждого опыта точно воспроизводятся при его повторении, так как отсутствуют случайные воздействия. В связи с этим нет необходимости в проверке однородности выборочных дисперсий воспроизводимости, проведении рандомизации и дублировании опытов. В тоже время возникает сложность при проведении оценки значимости коэффициентов и проверки адекватности математической модели в форме полинома; уровни факторов часто оказываются неравноотстоящими.

Иначе говоря, факторы $X_1, X_2, \dots, X_n$ не всегда варьируются на уровнях, отстоящих друг от друга через равные интервалы ΔX_i : не для всех N опытов измерено значение выходного параметра.

Проверка адекватности аппроксимирующего выражения по F -критерию и значимости коэффициентов по t -критерию в данном случае неприемлема, так как *дисперсия воспроизводимости* при определении значений Y по графику практически равна нулю ($s_y^2 = 0$). При этом все коэффициенты,

даже мало отличающиеся от нуля, окажутся значимыми. Любое отклонение вычисленного значения Y^* по полиному от значений Y , снятых с характеристики, формально делает модель неадекватной.

В этом случае наиболее приемлемы следующие пути:

- а) считать все коэффициенты значимыми;
- б) оценку адекватности проводить на основе принятого уровня точности аппроксимации ε , что связано с искусственным введением дисперсии воспроизводимости

$$s^2\{y\} = \varepsilon b_0,$$

где b_0 – нулевой коэффициент аппроксимирующего полинома.

Приняв в выражении (1.1) значение ε для выходного параметра, проверку адекватности модели можно произвести по F -критерию.

Оценку соответствия аппроксимирующего полинома аппроксимируемой кривой или их семейству можно осуществить по максимальному абсолютному отклонению значений выходного параметра, вычисленного по полиному, от значений, определяемых по статической характеристике $|Y - \hat{Y}|$.

Последний путь уступает в математической строгости первым двум. Однако, учитывая наглядность графического описания статических свойств объекта, этот путь вполне приемлем при обработке априорной информации.

К особенностям использования методов планирования эксперимента для математического представления статических характеристик следует отнести и то, что в этом случае на проведение эксперимента – определение значений выходного параметра по графику *не затрачивается много времени и ресурсов*, т. е. эксперимент не является дорогостоящим. Поэтому вопрос о минимизации количества необходимых опытов не стоит так остро, как при планировании натурных экспериментов. В связи с этим в большинстве случаев нет необходимости в последовательном проведении эксперимента. Это объясняется и тем, что характер статических характеристик уже известен. Например, если статическая характеристика показывает, что связь $Y = f(X_1, X_2)$ является нелинейной, то, как правило, нет необходимости в первоначальном использовании линейных планов.

Учитывая определенную сложность оценки адекватности модели, представляется целесообразным использовать нелинейные планы даже в тех случаях, когда нелинейность статических характеристик едва заметна. Кроме того, нелинейные планы более универсальны.

Связь между двумя параметрами в статическом режиме описывается отдельной кривой. Её математическое представление производится сравнительно просто – описанным в литературе методом наименьших квадратов.

Однако статические свойства большинства объектов исследования описываются семейством взаимосвязанных кривых.

2. Построение нелинейного полинома по одиночным кривым

Однофакторный нелинейный полином можно построить по трём и по пяти равноотстоящим точкам измерения выходного параметра как частные случаи планирования эксперимента на шестиугольнике, в кодированных величинах представляющий собой ротатабельный план (рис. 1).

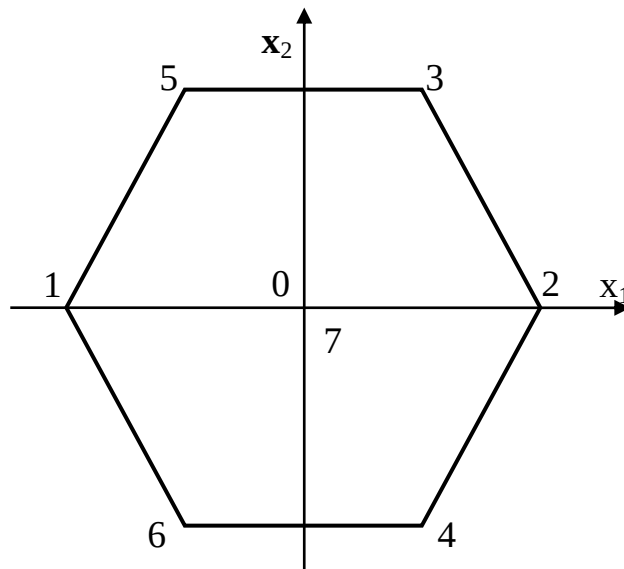


Рис. 1. Схема плана

В первом случае предполагаем, что влияние параметра x_1 на выходной параметр мало и им можно пренебречь. Тогда точки 3, 5; 1, 2; 4, 6 стягиваются к вертикальной оси. Коэффициенты модели рассчитываются по трём точкам: $-1, 0, +1$ (рис. 2).

Во втором случае предполагаем, что влияние параметра x_2 пренебрежимо мало и им также можно пренебречь. Тогда коэффициенты полинома рассчитываются по пяти точкам. В этом случае точки 5, 6 сливаются в точку 2 образуют вторую точку измерения параметра; точки 3, 4 – в точку 4. Начало координат рассматривается как точка 3 на числовой оси (рис. 2). Точки 1÷5 распределяются по оси кодированных факторов $\tilde{x}_1$: $-1; -0,5; 0; +0,5; +1$.

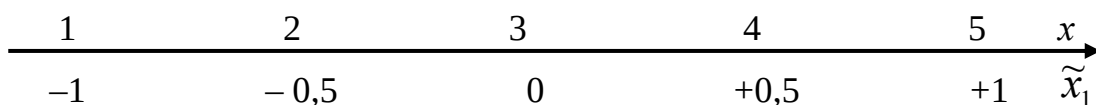


Рис. 2. Распределение точек измерения на числовой оси

В обоих случаях аппроксимирующее выражение имеет вид

$$Y^* = b_0 + b_1 \tilde{x}_1 + b_{11} \tilde{x}_1^2. \quad (1)$$

Формулы расчёта для определения коэффициентов полинома по трём равноотстоящим точкам будут иметь вид

$$b_0 = y_3; \quad b_1 = (y_5 - y_1)/2; \quad b_{11} = (y_1 + y_5)/2 - y_3. \quad (2)$$

Формулы расчёта коэффициентов квадратичного полинома по пяти равноотстоящим точкам

$$b_0 = y_3; \quad b_1 = [(y_4 + y_5) - (y_1 + y_2)]/3; \quad b_{11} = (y_1 + y_5)/2 - y_3. \quad (3)$$

Формулы (3) отличаются от предыдущих формул только более точным определением коэффициента b_1 , так как, он определяется не по двум, а по четырём точкам.

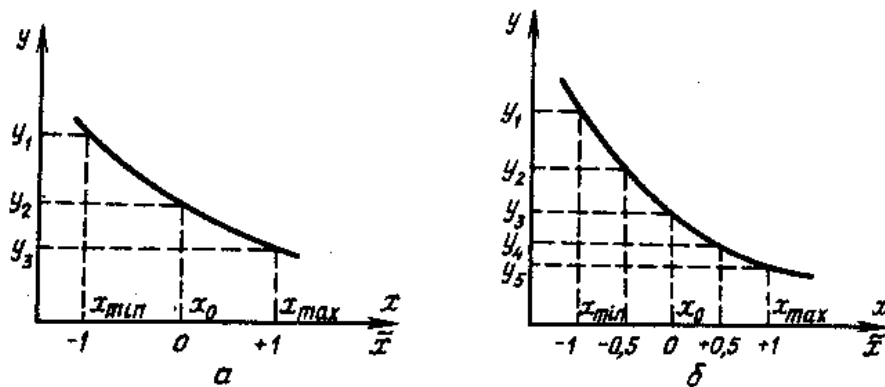


Рис. 3. Статические характеристики нелинейных объектов, аппроксимируемые уравнением второго порядка: *a* – по трём точкам, *б* – по пяти точкам

Данные формулы позволяют аппроксимировать большой класс гладких кривых, представителями которых являются заградительные и другие кривые. При $b_{11} = 0$ полином превращается в уравнение прямой линии.

2.1. Пример построения однофакторного нелинейного полинома

Зависимость диаметра D навивки ваеров на барабане лебёдки от длины ваеров является ступенчатой (рис. 4). Требуется представить эту зависимость в виде полиномиальной модели.

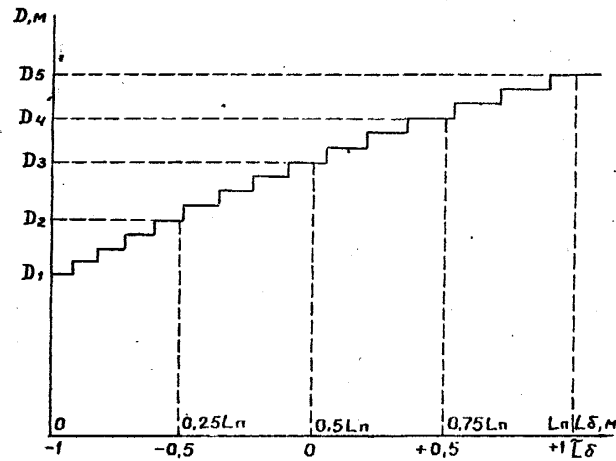


Рис. 4. Общий вид графика зависимости диаметра навивки ваеров на барабан от длины ваеров

На рис. 4 обозначена L_{Π} – полная длина ваеров на барабане

Решение. Ступенчатую кривую заменяем гладкой кривой (рис. 5).

Погрешность от такой замены составляет не более половины диаметра ваера d . Например, для диаметра ваера $d = 28$ мм погрешность не превышает 2,8% от среднего диаметра навивки $D_{\text{ср}} = 1,05$ м.

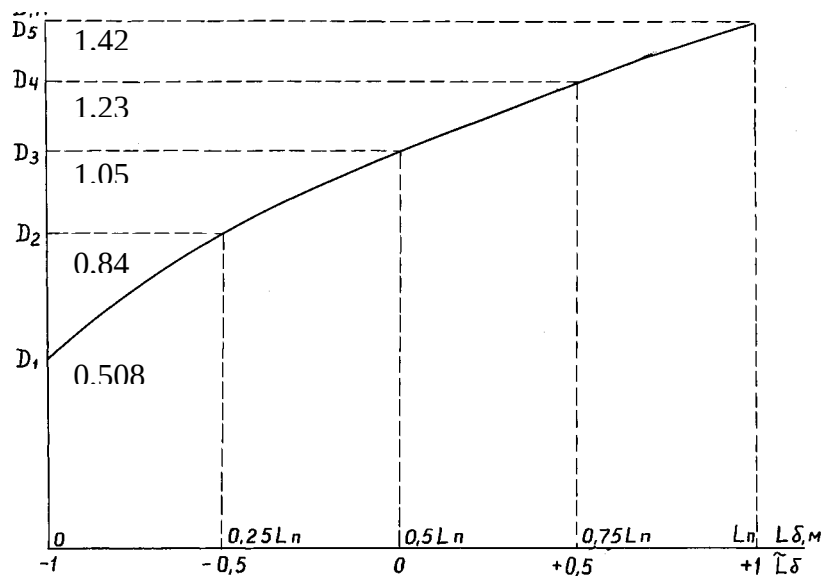


Рис. 5. Аппроксимированный график зависимости диаметра навивки ваеров

Представим измерения диаметра навивки в виде табл. 1.

Таблица 1

Зависимость диаметра навивки от длины ваеров на барабане

Номер измерения	1	2	3	4	5
$L, \text{ м}$	0	$0,25L_{\Pi}$	$0,5L_{\Pi}$	$0,75L_{\Pi}$	L_{Π}
$D, \text{ м}$	0,508	0,84	1,05	1,23	1,42

Нелинейная полиномиальная модель по одному параметру имеет вид
(1)

Согласно (2) определим коэффициенты по трём равноотстоящим измерениям диаметра (см. рис. 5), включая крайние точки

$$a_0 = D_3; \quad a_1 = 0,5(D_5 - D_1); \quad a_{11} = 0,5(D_1 + D_5) - D_3;$$

$$a_0 = 1,05; \quad a_1 = 0,5(1,42 - 0,508) = 0,456; \quad a_{11} = 0,5(1,42 + 0,508) - 1,05 = -0,086.$$

Подставив значения коэффициентов, получим модель

$$\hat{D} = 1,05 + 0,456\tilde{L}_6 - 0,086\tilde{L}_6^2, \text{ м.}$$

Согласно (3) определим коэффициенты по пяти равноотстоящим точкам

$$a_0 = D_3; \quad a_1 = 1/3[(D_4 + D_5) - (D_1 + D_2)]; \quad a_{11} = 0,5(D_1 + D_5) - D_3$$

$$a_1 = 1/3[(1,23 + 1,42) - (0,508 + 0,84)] = 0,434$$

$$a_0 = 1,05; \quad a_1 = 0,434; \quad a_{11} = 0,5(0,508 + 1,42) - 1,05 = -0,086.$$

Подставив значения коэффициентов, получим модель

$$\hat{D} = 1,05 + 0,434\tilde{L}_6 - 0,086\tilde{L}_6^2, \text{ м.}$$

Для проверки точности аппроксимации кривой сравним измеренные и вычисленные по моделям значения диаметра. Для этого подставим в модель

кодированные значения $\tilde{L}_6$. Измеренные и вычисленные значения занесём в табл. 2.

Таблица 2

**Таблица сравнений вычисленных значений диаметра навивки
по трём и по пяти точкам**

Номер измерения	1	2	3	4	5
$\tilde{L}_6$	−1	−0,5	1,0	0,5	1
Измеренное значение D	0,508	0,84	1,05	1,23	1,42
Вычисление D по трём точкам	0,508	0,80	1,05	1,256	1,42
Вычисление D по пяти точкам, м	0,53	0,81	1,05	1,246	1,398

Вычислим значения $\hat{D}$ по полиному, рассчитанному по трём точкам

$$\hat{D}_1 = 1,05 + 0,456(-1) - 0,086(-1)^2 = 0,508 \text{ м};$$

$$\hat{D}_2 = 1,05 + 0,456(-0,5) - 0,086(-0,5)^2 = 0,80 \text{ м};$$

$$\hat{D}_3 = 1,05 \text{ м};$$

$$\hat{D}_4 = 1,05 + 0,456(+0,5) - 0,086(+0,5)^2 = 1,256 \text{ м};$$

$$\hat{D}_5 = 1,05 + 0,456(+1) - 0,086(+1)^2 = 1,42 \text{ м}.$$

Максимальное отклонение значений диаметра во второй точке

$\Delta D_2 = 0,04$ м, что составляет 4 % от среднего диаметра.

Аналогично рассчитываются значения $\hat{D}$ по пяти точкам. Данные расчёта занесены в табл. 2.

При аппроксимации полиномом, вычисленным по 5-ти точкам максимальное отклонение $\Delta D_2 = 0,03$ м, что составляет 3 % от среднего диаметра ($D = 1,05$).

Вывод.

Значения диаметра, рассчитанные по пяти точкам, оказались более точными, чем значения диаметра навивки, рассчитанные по трём точкам.

2.2. Задание на построение однофакторного нелинейного полинома

Рассчитать коэффициенты полинома $y = f(x)$ по данным измерениям, представленным в табл. 3. Сравнить измеренные и вычисленные по модели значения в трёх и пяти точках измерения. При аппроксимации результатов измерения по трём точкам следует использовать всё факторное пространство, т. е. использовать точки 1, 3, 5.

Таблица 3

Варианты задания 1

Вариант	Номер измерения	1	2	3	4	5
1	x	10	30	50	70	90
	y	0,5	0,45	0,4	0,34	0,32
2	x	20	60	100	140	180
	y	6	5,25	4,2	2,5	0,5
3	x	10	30	50	70	90
	y	4,0	4,3	4,6	5,0	5,7
4	x	10	50	90	130	170
	y	0,4	0,45	0,57	0,72	0,93
5	x	40	60	80	100	120
	y	0,45	0,49	0,54	0,60	0,69
6	x	20	60	100	140	180
	y	4,0	4,3	4,6	5,0	5,7
7	x	40	60	80	100	120
	y	0,4	0,45	0,57	0,72	0,95

3. Построение двухфакторного линейного полинома

3.1. Пример построения двухфакторного линейного полинома

Пример 1. Проводились опыты по двум факторам согласно табл. 4. Каждый фактор мог устанавливаться только на двух уровнях. Требуется построить двухфакторный полином с полной статистической обработкой.

Таблица 4

Условия и результаты опытов

Опыт	X_1	X_2	y_{u1}	y_{u2}	$\bar{y}_u = \frac{y_{u1} + y_{u2}}{2}$
1	$X_{1\min}$	$X_{2\min}$	27,0	28,0	27,5
2	$X_{1\max}$	$X_{2\min}$	15,9	17,1	16,5
3	$X_{1\min}$	$X_{2\max}$	22,1	22,9	22,5
4	$X_{1\max}$	$X_{2\max}$	13,4	13,6	13,5

Решение. Составим табл. 5, обозначив независимые параметры (факторы) в кодированных переменных и дополним табл. 5 столбцом $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ для оценки эффекта взаимодействия параметров.

Таблица 5

Условия и результаты опытов

Опыт	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}	$\bar{y}_u = \frac{y_{u1} + y_{u2}}{2}$
1	–	–	+	27,0	28,0	27,5
2	+	–	–	15,9	17,1	16,5
3	–	+	–	22,1	22,9	22,5
4	+	+	+	13,4	13,6	13,5

Из табл. 4 и 5 видно, что проведено 4 опыта, каждый опыт дублировался ($p = 1,2$), определялось среднее значение $\bar{y}_u$. Для решения вопроса об однородности результатов эксперимента оценим дисперсию измерений в каждом опыте.

При дублировании опытов значение оценок дисперсии в каждом опыте плана рассчитывается по формуле (1.14), т. е.

$$s_u^2 = \Delta^2 / 2,$$

где Δ – разность между параллельными опытами.

Таким образом,

$$s_1^2 = \frac{(27,0 - 28,0)^2}{2} = 0,50; \quad s_2^2 = \frac{(15,9 - 17,1)^2}{2} = 0,72.$$

Аналогично $s_3^2 = 0,32$ и $s_4^2 = 0,02$.

Процесс воспроизводим, так как неравенство (1.11) выполняется

$$G = \frac{0,72}{0,50 + 0,72 + 0,32 + 0,02} = 0,4615 < G_{(0,05;4;1)} = 0,9065$$

Для проверки адекватности и значимости коэффициентов определим дисперсию воспроизводимости (ошибку опыта)

$$s_y^2 = \frac{0,50 + 0,72 + 0,32 + 0,02}{4} = 0,39$$

Коэффициенты модели согласно (1.15) определяются по формулам :

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n \bar{y}_u; \quad b_i = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} \bar{y}_u; \quad b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u.$$

$$b_0 = \frac{27,5 + 16,5 + 22,5 + 13,5}{4} = 20;$$

$$b_1 = \frac{-27,5 + 16,5 - 22,5 + 13,5}{4} = -5;$$

аналогично $b_2 = -2$ и $b_{12} = 0,5$.

Проверка значимости коэффициентов. Коэффициент считается значимым, если выполняется неравенство (1.15), т. е.

$$|b_i| \geq \Delta b_i = t_{(0,05;f_y)} \cdot \frac{s_y}{\sqrt{n}}.$$

При $f_y = 4$ табличное значение t – критерия: $t = 2,78$ (Приложение 4)

$$\Delta b_i = 2,78 \frac{\sqrt{0,39}}{\sqrt{4}} = 0,87.$$

Все полученные по расчету коэффициенты регрессии, кроме $b_{ij} = 0,5$, значимы,

так как $|b_i| > \Delta b_i$.

Проверка адекватности для рассматриваемого примера выполняется в следующем порядке.

По полученному уравнению

$$Y^* = 20 - 5x_1 - 2x_2$$

находим расчетные значения y_u^* . Все последующие расчеты сведены в табл. 6.

Таблица 6

Опыт	$\bar{y}_u$	y_u^*	$(\bar{y}_u - y_u^*)^2$
1	27,5	27,0	0,25
2	16,5	17,0	0,25
3	22,5	23,0	0,25
4	13,5	13,0	0,25

Адекватность модели обоснована, если выполняется неравенство (1.16), т. е.

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2} \leq F_{(0,05;f_{ад};f_y)},$$

где $f_y = n(m - 1) = 4(2 - 1) = 4$;

n – число опытов плана, m – число замеров параметра в каждом опыте

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - y_u^*)^2}{n - k - 1} = \frac{1}{4 - 2 - 1} = 1.$$

Табличное значение F -критерия при f_1, f_2 (Приложение 2) $F_{(0,05; 1; 4)} = 7,7$.

В Приложении 2 обозначены: $f_1 = f_{\text{ад}}, f_2 = f_y$.

$$F = \frac{1}{\sqrt{0,39}} = 1,6 < F_{(0,05; 1; 4)} = 7,7,$$

следовательно, модель адекватна.

3.2. Задание на построение двухфакторного линейного полинома

Проводились опыты по полному факторному эксперименту ПФЭ 2^2 . Каждый опыт проводился дважды. Требуется построить линейную модель по экспериментальным данным, представленным в табл. 7. Произвести статистическую обработку эксперимента.

Таблица 7

Варианты задания

Вариант 1					Вариант 2				
Опыт	План		Результат опыта		Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	85	87	1	–	–	60	64
2	+	–	89	92	2	+	–	29	31
3	–	+	18	20	3	–	+	43	46
4	+	+	53	49	4	+	+	20	22

Вариант 3					Вариант 4				
Опыт	План		Результат опыта		Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	28	30	1	–	–	12	10
2	+	–	40	43	2	+	–	15	12
3	–	+	12	11	3	–	+	20	18
4	+	+	15	17	4	+	+	32	29

Вариант 5			Вариант 6		
Опыт	План	Результат опыта	Опыт	План	Результат опыта

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}	
1	–	–	16	14	1	–	–	13	12	
2	+	–	24	27	2	+	–	15	13	
3	–	+	5	6	3	–	+	22	20	
4	+	+	11	12	4	+	+	31	34	

4. Построение двухфакторного нелинейного полинома по семейству статических характеристик

4.1. Примеры построения двухфакторного нелинейного полинома

Пример 1. На рис. 6 представлена тарифовочная диаграмма трала 2131, которая показывает зависимость горизонта хода трала от скорости его буксировки V_s и длины ваеров L [5]. Представим диаграмму в виде полиномиальной зависимости $h = f(v_s, L)$.

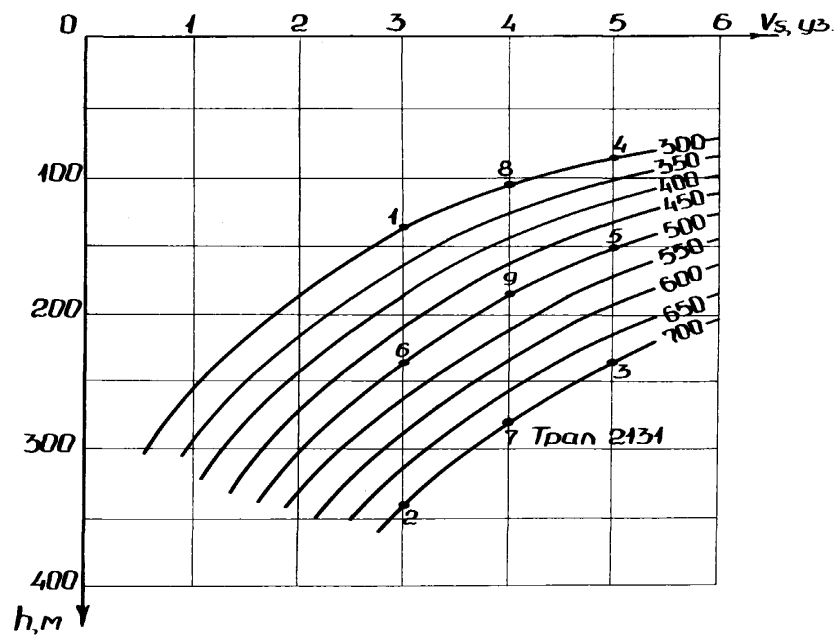


Рис. 6. Тарифовочная диаграмма трала

Решение. Введём обозначения независимых переменных: $\tilde{v}_s$ – скорость судна в кодированных координатах; $\tilde{L}_b$ – длина вытравленных ваеров в кодированных значениях. Ограничим описываемую область следующими значениями независимых переменных (факторов):

$$V_s^{\min} = 3 \text{ уз}; V_s^{\max} = 5 \text{ уз}; L_b^{\min} = 300 \text{ м}; L_b^{\max} = 700 \text{ м}.$$

Определим центр эксперимента

$$V_s^0 = (V_s^{\max} + V_s^{\min})/2 = 4 \text{ уз},$$

$$L_B^0 = (L_B^{\max} + L_B^{\min})/2 = 500 \text{ м}$$

и интервалы варьирования независимых переменных

$$\Delta V_s = (V_s^{\max} - V_s^{\min})/2 = 1 \text{ уз},$$

$$\Delta L_B = (L_B^{\max} - L_B^{\min})/2 = 200 \text{ м}.$$

Построим таблицу кодирования факторов (табл. 8)

Таблица 8

Кодирование факторов

Интервал варьирования и уровень факторов	Скорость судна, уз.	Длина вагеров, м
Нулевой уровень $X_i = 0$	4	500
Интервал варьирования ΔX_i	1	200
Нижний уровень $X_{i \min}$	3	300
Верхний уровень $X_{i \max}$	5	700
Кодовое обозначение	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$

Связь кодированных (относительных) величин с натуральными определится

$$\tilde{v}_s = (V_s - V_s^0) / \Delta V_s; \quad \tilde{L}_B = (L - L_B^0) / \Delta L_B$$

План эксперимента и расчётная матрица представлены в табл. 9.

Таблица 9

План эксперимента и расчётная матрица для построения полиномиальной модели $h = f(v_s, L)$

Номер точки	Уровень фактора		Результат опыта	Результат расчёта		
	$\tilde{v}_s$	$\tilde{L}$		$\hat{h},$ м	$ h - \hat{h} , \text{ м}$	$ h - \hat{h} , \%$
1	-1	-1	135	136,5	1,5	0,9
2	-1	+1	340	341,1	1,1	0,2
3	+1	+1	235	233,1	1,9	1,4
4	+1	-1	85	84,5	0,5	0,5
5	+1	0	150	152,2	2,2	1,0
6	-1	0	235	232,2	2,8	1,5
7	0	+1	280	280,6	0,6	0
8	0	-1	105	104,0	1,0	0,6
9	0	0	185	185,7	0,7	0,4

Коэффициенты полинома определяются по формулам (1.25) или с помощью ЭВМ (программа NomA). Определим значения коэффициентов полинома по (1.25):

$$b'_0 = 1/9 (135 + 340 + 235 + 85 + 150 + 235 + 280 + 105 + 185) = 194,4;$$

$$b_{11} = 1/6 [(135 + 340 + 235 + 85 + 150 + 235) - 2(280 + 105 + 185)] = 6,5;$$

$$b_{22} = 1/6 [(135 + 340 + 235 + 85 + 280 + 105) - 2(150 + 235 + 185)] = 6,6;$$

$$b_0 = b'_0 - 2/3(b_{11} + b_{22}) = 194,4 - 2/3(6,5 + 6,6) = 185,7;$$

$$b_1 = 1/6 (-135 - 340 + 235 + 85 + 150 - 235) = -40,0;$$

$$b_2 = 1/6 (-135 - 340 + 235 - 85 + 280 - 105) = 88,3;$$

$$b_{12} = 1/4 (135 - 340 + 235 - 85) = -14,0.$$

Подставив значения коэффициентов и учитывая принятые обозначения, получим полиномиальную модель тарировочной диаграммы трала

$$h^* = 185,7 - 40,0\tilde{v}_s + 88,3\tilde{L}_e - 14,0\tilde{v}_s\tilde{L}_e + 6,5\tilde{v}_s^2 + 6,6\tilde{L}_e^2, \text{ м,}$$

где $\tilde{v}_s = V_s - 4$; $\tilde{L}_e = (L - 500)/200$.

Из табл. 8 видно, что максимальное отклонение расчётного значения от экспериментального не превышает 2 %. Аппроксимацию можно считать приемлемой. В противном случае следует уменьшить радиус обследуемой сферы, т. е. диапазон варьировемого участка, или повысить степень полинома.

С помощью ЭВМ (программа Main) построим диаграмму в кодированных величинах (рис. 7).

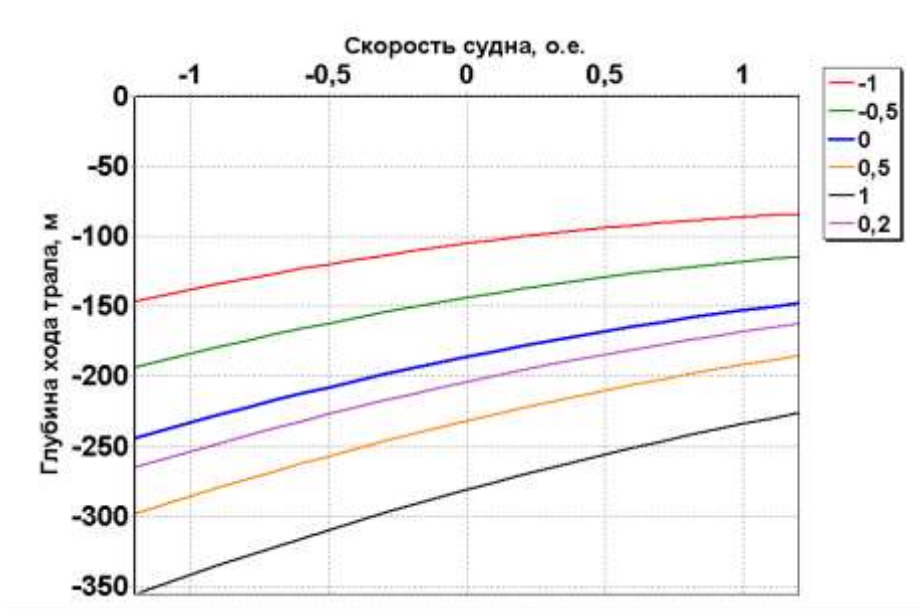


Рис. 7. Тарировочная диаграмма трала 2131, построенная по полиному

В качестве примера на диаграмме розовым цветом показана кривая зависимости глубины хода трала от скорости судна при кодированном значении длины ваера $\tilde{L}_e = 0,2$.

Перейдя кодированное значение длины ваеров $\tilde{L}_e = 0,2$ в натуральную величину, получим

$$L = \Delta L \tilde{L}_e + L_0 = 200 \cdot 0,2 + 500 = 540 \text{ м.}$$

Определить значение глубины хода трала можно путём подстановки в полином кодированных значений переменных.

Примеры использования полиномиальной модели для управления процессом

Пример 2. Предположим, что требуется рассчитать глубину хода трала для скорости судна 4 узла и длины ваеров 540 м.

Скорость судна 4 узла в кодированных единицах составит $\tilde{v}_s = 0$, длина ваеров в кодированных единицах $\tilde{L}_e = 0,2$. Подставив кодированные значения в полином

$$h^* = 185,7 - 40,0\tilde{v}_s + 88,3\tilde{L}_e - 14,0\tilde{v}_s\tilde{L}_e + 6,5\tilde{v}_s^2 + 6,6\tilde{L}_e^2, \text{ м,}$$

получим

$$h^* = 185,7 + 88,3(0,2) + 6,6(0,2)^2 = 185,7 + 17,66 + 0,264 = 203,6 \text{ м.}$$

Пример 3. Предположим, что требуется определить глубину хода трала при скорости судна 5 узлов ($\tilde{v} = +1$) и той же длине ваеров ($\tilde{L}_e = 0,2$).

$$h^* = 185,7 - 40,0 \cdot (+1) + 88,3(0,2) - 14,0(+1)(0,2) + 6,5(+1) + 6,6(0,2)^2 = 167,32 \text{ м.}$$

4.2. Задание на построение двухфакторного нелинейного полинома по статическим характеристикам

Вариант 1. Построить двухфакторный полином по семейству статических характеристик, представленному на рис. 8.

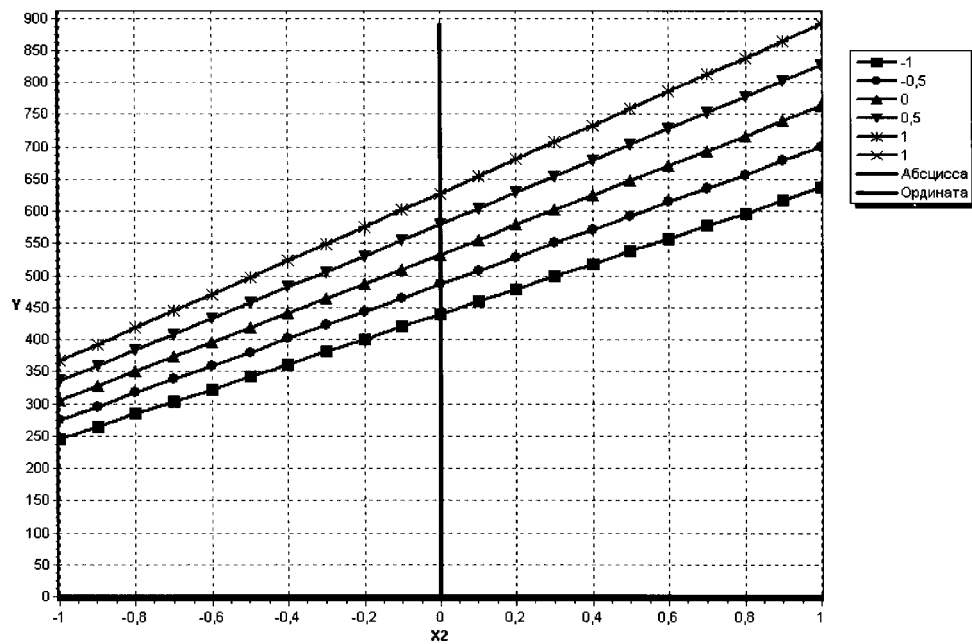


Рис. 8. Семейство характеристик для построения полиномиальной модели

Вариант 2. Составить план эксперимента и расчётную матрицу для построения полиномиальной модели $Y = f(x_1, x_2)$ по семейству статических характеристик (рис. 9). По полученным полиномиальным моделям построить графики с помощью ЭВМ. Сравнить полученные результаты с исходными данными.

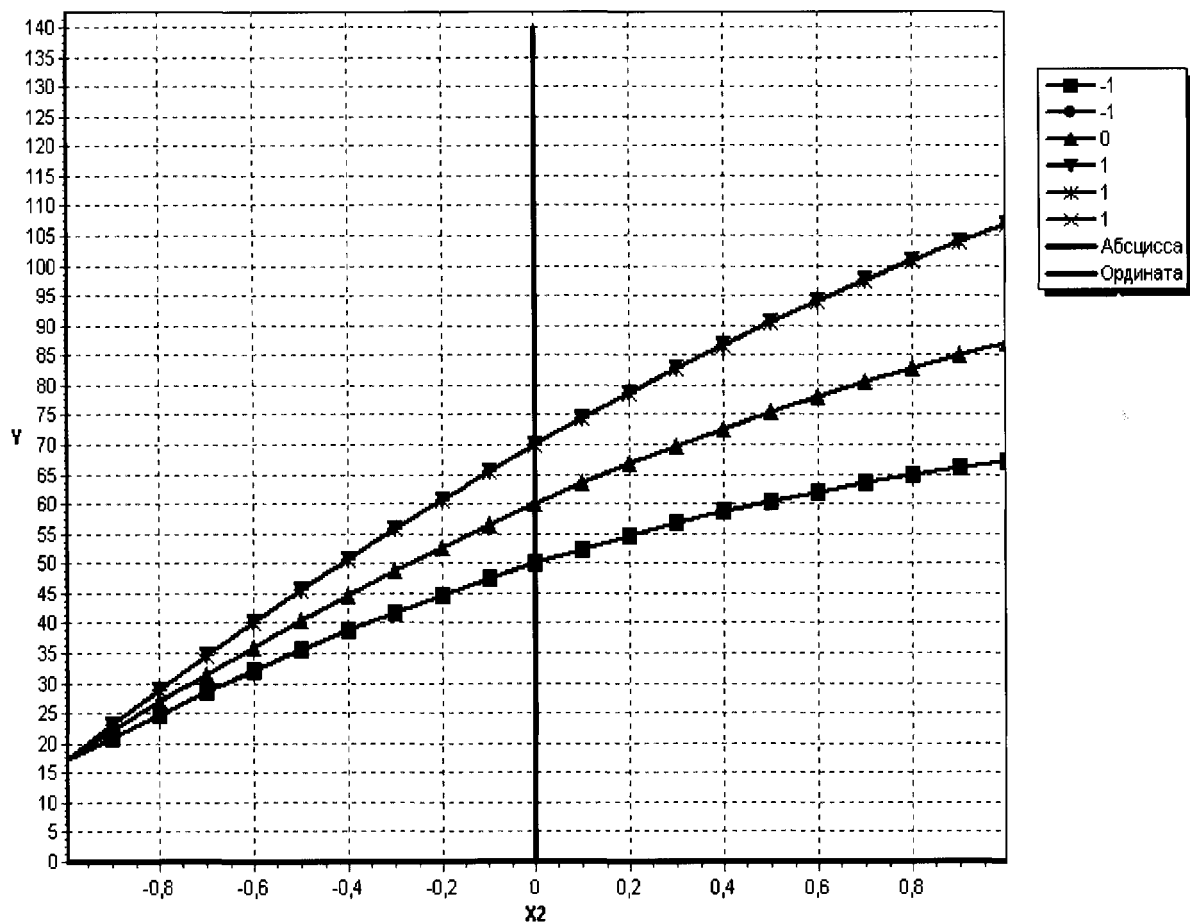


Рис. 9. Семейство характеристик для построения полиномиальной модели

Вариант 3. Составить план эксперимента и расчётную матрицу для построения полиномиальной модели $Y = f(x_1, x_2)$ по семейству статических характеристик (рис. 10). По полученным полиномиальным моделям построить графики с помощью ЭВМ. Сравнить полученные результаты с исходными данными.

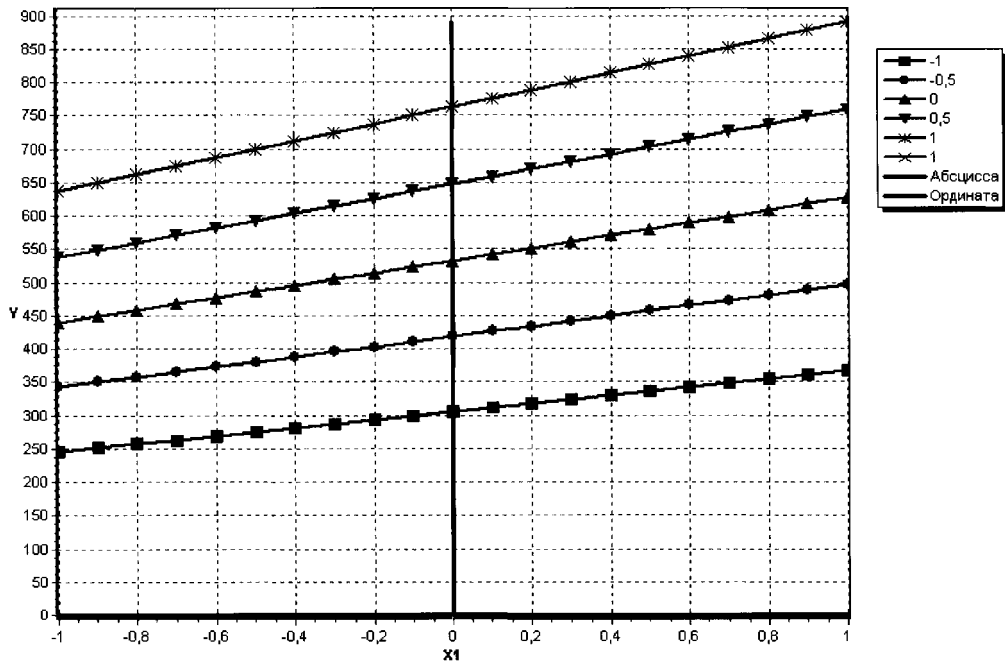


Рис. 10. Семейство характеристик для построения полиномиальной модели

Вариант 4. Составить план эксперимента и расчётную матрицу для построения полиномиальной модели $Y = f(x_1, x_2)$ по семейству статических характеристик (рис. 11). По полученным полиномиальным моделям построить графики с помощью ЭВМ. Сравнить полученные результаты с исходными данными.

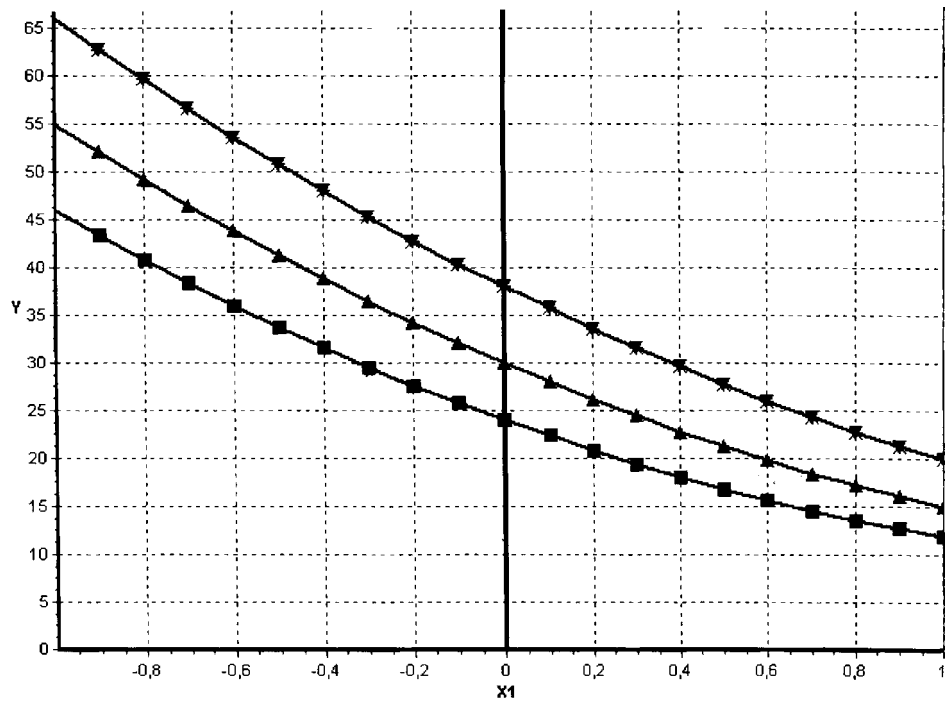


Рис. 11. Семейство характеристик для построения полиномиальной модели

Вариант 5. Составить план эксперимента и расчётную матрицу для построения полиномиальной модели $Y = f(x_1, x_2)$ по семейству статических характеристик (рис. 12). По полученным полиномиальным моделям построить графики с помощью ЭВМ. Сравнить полученные результаты с исходными данными.

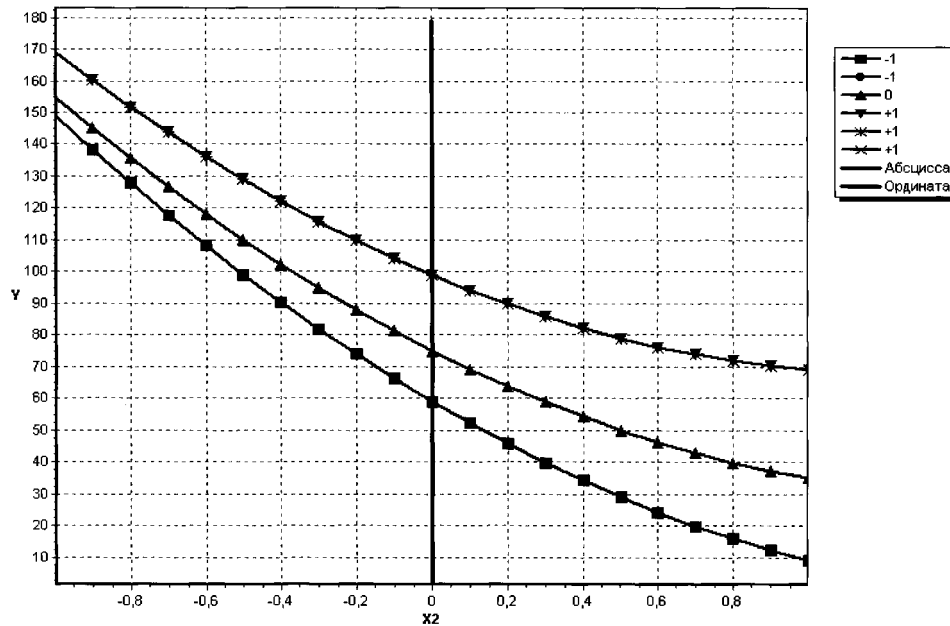


Рис.12. Семейство характеристик для построения полиномиальной модели

Вариант 6. Построить полиномиальную модель механической характеристики, представленной на рис. 13. Рабочую область ограничить следую-

щими параметрами: момент на валу $M_{\min} = 1500$ Нм, $M_{\max} = 5500$ Нм; рукоятки поста управления $ПУ_{\min} = 5$; $ПУ_{\max} = 7$.

Построить таблицу кодирования факторов, записать кодированные значения параметров, выраженные через их натуральные величины.

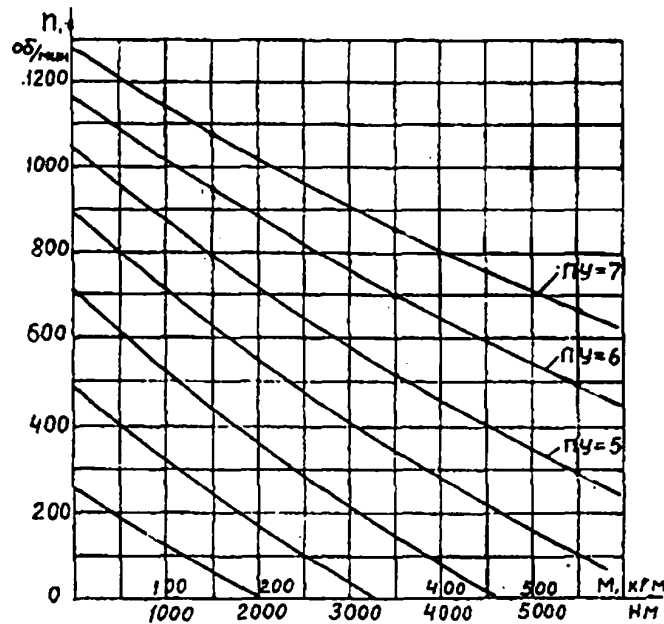


Рис. 13. Механическая характеристика электропривода

Вариант 7. Построить полиномиальную модель механической характеристики, представленной на рис. 13. Построить таблицу кодирования факторов, записать кодированные значения параметров, выраженные через натуральные величины.

Рабочую область ограничить следующими параметрами: момент на валу $M_{\min} = 0$ Нм; $M_{\max} = 6\,000$ Нм; $ПУ_{\min} = 5$; $ПУ_{\max} = 7$.

ВСТАВКА 1

5. Построение двухфакторного нелинейного полинома по таблице

5.1. Пример построения двухфакторного нелинейного полинома по таблице

Информация об объекте (времени отставания трала от судна ($t_{\text{зап.}}$) при различных значениях длины ваеров $L_{\text{в}}$ и скорости судна $V_{\text{с}}$) представлена в виде табл. 10 [5]. Используя табличные данные, построим полиномиальную модель вида $t_{\text{зап.}} = f(L_{\text{в}}, V_{\text{с}})$

Таблица 10

Результаты замеров времени отставания трала от судна $t_{\text{зап.}}$ при различной длине ваеров за бортом $L_{\text{в}}$ и скорости судна $V_{\text{с}}$

$V_{\text{с}}, \text{уз}$	$L_{\text{в}}, \text{м}$								
	300	350	400	450	500	550	600	650	700
3,0	2,8	3,3	3,7	4,2	4,7	5,2	5,7	6,1	6,6

3,5	2,5	2,9	3,3	3,7	4,1	4,5	5,0	5,4	5,8
4,0	2,2	2,6	3,0	3,3	3,7	4,1	4,4	4,8	5,2
4,5	2,0	2,4	2,7	3,0	3,4	3,7	4,0	4,4	4,7
5,0	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	4,3

Решение. С целью построения полиномиальной модели по табличным данным воспользуемся симметричным планом типа $M_1 \times M_2$, например, планом 5×5 .

Выделим в таблице пять равномерно расположенных значений X_1 и пять значений X_2 , создадим таблицу 5×5 (табл. 11).

Таблица 11

Исходные данные для построения полинома $t_{\text{зап}} = f(L, Vs)$

Vs, уз	L, м				
	300	400	500	600	700
3,0	2,8	3,7	4,7	5,7	6,6
3,5	2,5	3,3	4,1	5,0	5,8
4,0	2,2	3,0	3,7	4,4	5,2
4,5	2,0	2,7	3,4	4,0	4,7
5,0	1,8	2,4	3,0	3,7	4,3

Проведём кодирование факторов (длины ваеров L и скорости судна Vs) (табл. 12)

Таблица 12

Кодирование факторов

Интервал варьирования и уровень фактора	L, м	Vs, уз
Нулевой уровень X_0	500	4,0
Интервал варьирования ΔX	200	1,0
Нижний уровень $X_{\min}$	300	3,0
Верхний уровень $X_{\max}$	700	5,0
Кодовое обозначение	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$

Связь между кодовым и натуральным выражением фактора задаётся формулой $\tilde{x}_i = (X_i - X_{i0}) / \Delta X_i$

Следовательно, $\tilde{x}_1 = (X_1 - 500) / 200$; $\tilde{x}_2 = X_2 - 3$.

Используем значения постоянных для расчёта коэффициентов регрессии для симметричных планов 5×5 с числом опытов $N = 25$ (табл. 13).

Таблица 13

Значения постоянных $A \cdot 10^5$ для расчёта коэффициентов регрессии

для симметричных планов

План	N	A_0	A_{0i}	A_i	A_{ii}	A_{ij}
5×5	25	15 429	11 429	8 000	22 857	16 000

Рассчитаем коэффициенты полинома по (1.33).

$$b_0 = A_0 \cdot (0Y) - \sum A_{0i}(iiY) = 0,15429 \cdot 94,7 - 0,11429 \cdot (47,375 + 48,075) = 3,67;$$

$$b_1 = A_i(1Y) = 0,08000 \cdot 19,15 = 1,53; \quad b_2 = 0,08000 \cdot (-12,65) = -1,01.$$

$$b_{11} = A_{ii}(11Y) = 0,22857 \cdot 47,375 - 0,11429 \cdot 94,7 = 0,01;$$

$$b_{22} = A_{ii}(22Y) = 0,22857 \cdot 42,375 - 0,11429 \cdot 94,7 = 9,6856 - 10,8233 = -1,14;$$

$$b_{12} = A_{ij}(12Y) = 0,16000 \cdot (-0,955) = -0,153;$$

Полином, описывающий зависимость $y^* = f(x_1, x_2)$

$$y^* = 3,67 + 1,53\tilde{x}_1 - 1,01\tilde{x}_2 + 0,01\tilde{x}_1^2 - 1,14\tilde{x}_2^2 - 0,153\tilde{x}_1\tilde{x}_2,$$

$$\text{где } \tilde{x}_1 = (X_1 - 500) / 200; \quad \tilde{x}_2 = X_2 - 4.$$

План и расчётная матрица типа (M×M) представлены в таблице 14

Таблица 14

План и расчётная матрица эксперимента 5×5

Опыт и	План		Результат	Расчётная матрица				
	$\tilde{x}_1$ L	$\tilde{x}_2$ V_s		$\tilde{x}_1 \cdot y$	$\tilde{x}_2 \cdot y$	$\tilde{x}_1^2 \cdot y$	$\tilde{x}_2^2 \cdot y$	$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot y$
1	-1	-1	2,8	-2,8	-2,8	2,8	2,8	2,8
2	-1	-0,5	2,5	-2,5	-0,5×2,5	2,5	0,25×2,5	0,5×2,5
3	-1	0	2,2	-2,2	0	2,2	0	0
4	-1	+0,5	2,0	-2,0	0,5×2,0	2,0	0,25×2,0	-0,5×2,0
5	-1	+1	1,8	-1,8	1,8	1,8	1,8	-1,8
6	-0,5	-1	3,7	-0,5×3,7	-3,7	0,25×3,7	3,7	0,5×3,7
7	-0,5	-0,5	3,3	-0,5×3,3	-0,5×3,3	0,25×3,3	0,25×3,3	0,25×3,3
8	-0,5	0	3,0	-0,5×3,0	0	0,25×3,0	0	0
9	-0,5	+0,5	2,7	-0,5×2,7	0,5×2,7	0,25×2,7	0,25×2,7	-0,25×2,7
10	-0,5	+1	2,4	-0,5×2,4	2,4	0,25×2,4	2,4	-0,5×2,4
11	0	-1	4,7	0	-4,7	0	4,7	0
12	0	-0,5	4,1	0	-0,5×4,1	0	0,25×4,1	0
13	0	0	3,7	0	0	0	0	0
14	0	+0,5	3,4	0	0,5×3,4	0	0,25×3,4	0
15	0	+1	3,0	0	3,0	0	3,0	0
16	+0,5	-1	5,7	+0,5×5,7	-5,7	0,25×5,7	5,7	-0,5×5,7
17	+0,5	-0,5	5,0	+0,5×5,0	-0,5×5,0	0,25×5,0	0,25×5,0	-0,25×5,0
18	+0,5	0	4,4	+0,5×4,4	0	0,25×4,4	0	0
19	+0,5	+0,5	4,0	+0,5×4,0	0,5×4,0	0,25×4,0	0,25×4,0	0,25×4,0
20	+0,5	+1	3,7	+0,5×3,7	3,7	0,25×3,7	3,7	0,5×3,7
21	+1	-1	6,6	6,6	-6,6	6,6	6,6	-6,6
22	+1	-0,5	5,8	5,8	-0,5×5,8	5,8	0,25×5,8	-0,5×5,8

23	+1	0	5,2	5,2	0	5,2	0	0
24	+1	+0,5	4,7	4,7	0,5×4,7	4,7	0,25×4,7	0,5×4,7
25	+1	+1	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3
			(0Y)	(1Y)	(2Y)	(11Y)	(22Y)	(121Y)
			94,7	19,15	-12,65	47,375	42,375	-0,955

Точный регрессионный анализ возможен в том случае, когда известна ошибка опыта. Если ошибка опыта неизвестна, то целесообразно назначить ошибку как 1–10 %-ю относительную ошибку к среднему значению выхода, при степени свободы $f_s = \infty$. Среднее значение Y соответствует значению b_0 , в нашем случае $b_0 = 3,67$.

Зададим 5 %-ю ошибку опыта относительно b_0 : $s_s = 0,18$.

Рассчитаем ошибки определения коэффициентов

$$s\{b_0\} = \sqrt{A_0} \cdot s_s = \sqrt{0,15429} \cdot 0,18 = 0,393 = 0,071;$$

$$s\{b_1\} = s\{b_2\} = \sqrt{A_i} \cdot s_s = \sqrt{0,08} \cdot 0,18 = 0,051;$$

$$s\{b_{ii}\} = \sqrt{A_{ii}} \cdot s_s = \sqrt{0,22857} \cdot 0,18 = 0,086;$$

$$s\{b_{12}\} = \sqrt{A_{ij}} \cdot s_s = \sqrt{0,16} \cdot 0,18 = 0,072.$$

Проверим значимость коэффициентов полинома

Значение t -критерия Стьюдента при 95%- й доверительной вероятности и степени свободы $f = \infty$, $t = 1,96$. (см. Приложение 3.2)

Все коэффициенты, кроме $b_{11} = 0,01$, большие своих критических значений, признаются значимыми (выполняется неравенство $|b_i| > t \cdot s\{b_i\}$)

Окончательно полином, описывающий зависимость $y = f(x_1, x_2)$, представленную в табличном виде (табл.14) имеет вид

$$\hat{y} = 3,67 + 1,53\tilde{x}_1 - 1,01\tilde{x}_2 - 1,14\tilde{x}_2^2 - 0,153\tilde{x}_1\tilde{x}_2,$$

или

$$t_{\text{зап}} = 3,67 + 1,53\tilde{L} - 1,01\tilde{v}_s - 1,14\tilde{v}_s^2 - 0,153\tilde{L}\tilde{v} \text{ мин.},$$

$$\text{где } \tilde{L} = \frac{L - 500}{200}; \quad \tilde{v}_s = V_s - 3$$

На рис.14 и 15 представлена априорная информация в графическом виде, построенная с помощью ЭВМ

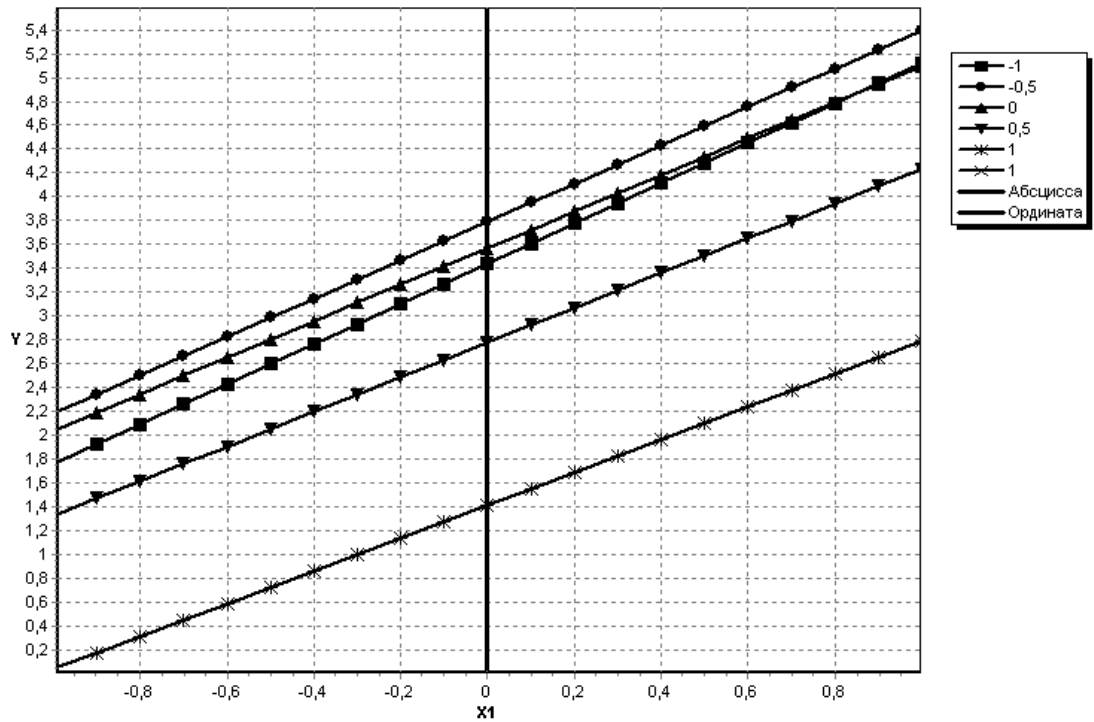


Рис. 14. График зависимости времени запаздывания трала $t_{\text{зап}}$ от длины ваеров L при различной скорости судна V_s

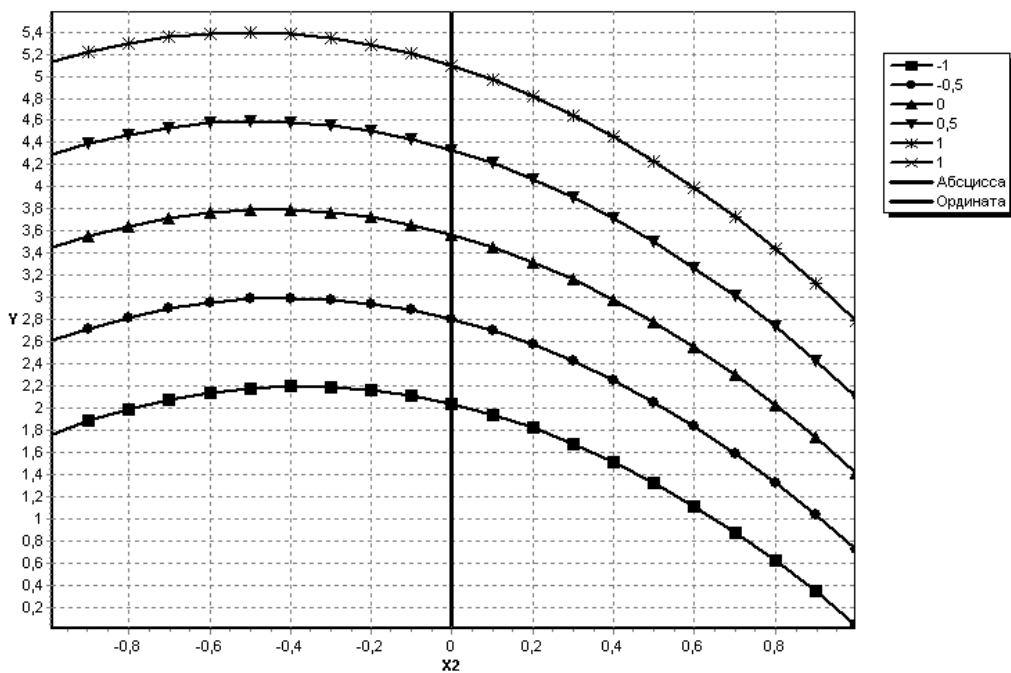


Рис. 15. График зависимости времени запаздывания трала $t_{\text{зап}}$ от скорости судна V_s при различной длине ваеров L

Из рисунков 14, 15 видно, между y - временем отставания и x_1 – длиной ваеров существует линейная связь при всех значениях x_2 – скорости судна, а связь между y и x_2 при всех значениях длины ваеров существенно нелинейная.

5.2. Задание на построение двухфакторного полинома по таблице

Задание 2. Используя табличные данные измерений времени отставания трала от судна (согласно варианту), построить полиномиальную модель вида $t_{\text{зап}} = f(L_B, V_S)$, построить таблицу кодирования факторов. Записать формулу перехода от кодированных величин к натуральным.

Вариант 1

Таблица 15

Таблица измерений времени отставания трала от судна

V_S , уз	L_B , м				
	300	350	400	450	500
3,0	2,8	3,3	3,7	4,2	4,7
3,5	2,5	2,9	3,3	3,7	4,1
4,0	2,2	2,6	3,0	3,3	3,7
4,5	2,0	2,4	2,7	3,0	3,4
5,0	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0

Вариант 2.

Таблица 16

Таблица измерений времени отставания трала от судна

V_S , уз	L_B , м				
	350	400	450	500	550
3,0	3,3	3,7	4,2	4,7	5,2
3,5	2,9	3,3	3,7	4,1	4,5
4,0	2,6	3,0	3,3	3,7	4,1
4,5	2,4	2,7	3,0	3,4	3,7
5,0	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3

Вариант 3.

Таблица 17

Таблица измерений времени отставания трала от судна

V_S , уз	L_B , м				
	400	450	500	550	600
3,0	3,7	4,2	4,7	5,2	5,7
3,5	3,3	3,7	4,1	4,5	5,0
4,0	3,0	3,3	3,7	4,1	4,4
4,5	2,7	3,0	3,4	3,7	4,0
5,0	2,4	2,7	3,0	3,3	3,7

Таблица измерений времени отставания трала от судна

V_s , уз	L_b , м				
	450	500	550	600	650
3,0	4,2	4,7	5,2	5,7	6,1
3,5	3,7	4,1	4,5	5,0	5,4
4,0	3,3	3,7	4,1	4,4	4,8
4,5	3,0	3,4	3,7	4,0	4,4
5,0	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0

Таблица измерений времени отставания трала от судна

V_s , уз	L_b , м				
	500	550	600	650	700
3,0	4,7	5,2	5,7	6,1	6,6
3,5	4,1	4,5	5,0	5,4	5,8
4,0	3,7	4,1	4,4	4,8	5,2
4,5	3,4	3,7	4,0	4,4	4,7
5,0	3,0	3,3	3,7	4,0	4,3

6. Преобразование двухфакторного нелинейного полинома

В ряде технологических процессов варьируемые параметры являются управляющими параметрами и, следовательно, возникает необходимость преобразования полиномиальной модели $Y = f(X_1, X_2)$ в модель вида $X_1 = f(Y, X_2)$ или $X_2 = f(Y, X_1)$.

6.1. Пример преобразования двухфакторного нелинейного полинома

Наиболее часто решаемой судоводителем задачей является определение управляющего воздействия на ваерную лебёдку – длины вытравленных ваеров L_b при заданной скорости судна v_s и глубине хода трала h . Глубина хода трала определяется глубиной скопления рыбы.

Решение. Преобразуем модель

$$h^* = 185,7 - 40\tilde{v} + 88,3\tilde{L} - 14,0\tilde{v} \cdot \tilde{L} + 6,5\tilde{v}^2 + 6,6\tilde{L}^2, \text{ м}$$

в модель вида $L = f(v, h)$.

Зададим диапазон изменения глубины хода трала от 100 м до 300 м и скорости судна от 3 до 5 узлов в соответствии с тарифовочной диаграммой трала и требования совместимости факторов. При определении корней уравнения учитываем, что h подставляется в формулы в абсолютных величинах, v_s – в относительных, а результат L_b получаем сначала в относительных (кодированных) величинах, а затем переводим в абсолютные величины, удобные для пользователя.

Запишем исходный полином $h = f(\tilde{v}, L)$ в виде квадратного уравнения

$$6,6\tilde{L}^2 + (88,3 - 14,0\tilde{v})\tilde{L} + (6,5\tilde{v}^2 - 40\tilde{v} + 185,7) - h = 0.$$

Обозначим: $A = 6,6$; $B = 88,3 - 14,0\tilde{v}$; $C^1 = (6,5\tilde{v}^2 - 40\tilde{v} + 185,7)$.

Согласно (1.30) формула итерационного приближения корней будет иметь вид

$$L_u = \frac{h - b'_{0u}}{b'_u + L_{u-1}} = \frac{h - C^1}{B + L_{u-1}}.$$

Предварительно определим значения $C^1 = b'_{0u}$ и $B = b'_u$ для трёх значений скорости судна v . Данные расчёта сведём в табл. 20.

Для дальнейшего расчёта коэффициентов модели выбираем ОЦКП второго порядка.

Таблица 20

Предварительные расчёты коэффициентов

Коэффициенты	$\tilde{v}$		
	$\tilde{v} = -1$	$\tilde{v} = 0$	$\tilde{v} = +1$
$C^1 = b'_{0u}$	232,2	185,7	152,2
B	102,3	88,3	74,3

Рассмотрим пример использования итерационного метода для точки № 1: $\tilde{v} = -1$, $h = 100$ м.

Определим корни для первого опыта ($v_s = -1$, $h = 100$) :

$$\text{первое приближение } \tilde{L}_u = \frac{h - b'_{0u}}{b'_u + L_{u-1}} = \frac{h - C^1}{B + L_{u-1}} = \frac{100 - 232,2}{102,05 + 0} = \frac{-132,2}{102,05} = -1,2954;$$

$$\text{второе приближение } \tilde{L} = \frac{-132,2}{102,05 - 1,2954} = \frac{-132,2}{100,7546} = -1,3121;$$

$$\text{третье приближение } \tilde{L} = -\frac{132,2}{102,05 - 1,3121} = -\frac{132,2}{100,7379} = -1,3123.$$

В данном примере итерация сошлась на третьем приближении.

Переведём кодированную величину в натуральную по формуле (1.6):

$$L = L_0 + \tilde{L} \Delta L = 500 - 1,3123 \cdot 200 = 238,0 \text{ м.}$$

Значения L_B для других точек плана определяются аналогично. Определив и заполнив табл. 21 значениями L_B , рассчитаем коэффициенты новой модели по формулам (1.25).

Таблица 21

План эксперимента для преобразования полиномиальной модели ($h = f(\tilde{v}_s, \tilde{h})$)
в модель вида $\hat{L} = f(\tilde{v}_s, \tilde{h})$

Номер точки	Уровень фактора		h в натур. переменных	Расчёт			
	$\tilde{v}$	$\tilde{h}$		$\tilde{L}_B$	L_B , м	$L_B^{пол}$	$ L_B - L_B^{пол} $, м
1	–	–	100	–1,292	238,2	239,2	1,0
2	–	+	300	0,6585	632,0	630,1	1,9
3	+	–	100	0,7093	358,0	360,1	2,1
4	+	+	300	1,9386	885,7	885,2	0,5
5	0	–	100	–0,9814	303,7	300,3	0,4
6	0	+	300	1,276	755,2	758,3	3,1
7	–	0	200	–0,3157	436,8	437,8	1,0
8	+	0	200	0,638	627,5	625,8	1,7
9	0	0	200	0,16165	532,3	532,4	0,1

В таблице использованы следующие обозначения:

L_B^* – абсолютные значения длины ваеров, вычисленные итерационным способом;

$L_B^{пол}$ – значения длины ваеров, рассчитанные по новому (преобразованному) полиному.

Из таблицы видно, что максимальное отклонение длины ваера $\Delta L = 3,1$ м, что по отношению к средней длине ваера $L_B = 532$ м составляет 0,6 %.

$$L_B^* = 532,4 + 94\tilde{v} + 229\tilde{h} + 33,5\tilde{v}\tilde{h} - 0,6\tilde{v}^2 - 3,1\tilde{h}^2, \text{ м.}$$

Квадратичным эффектом ($b_{11} = -0,6$) вследствие его малости можно пренебречь. Окончательно зависимость длины ваеров от скорости судна и глубины хода трала описывается полиномом вида

$$L_B^* = 532,4 + 94\tilde{v} + 229\tilde{h} + 33,5\tilde{v}\tilde{h} - 3,1\tilde{h}^2, \text{ м.}$$

6.2. Задание на преобразование двухфакторного нелинейного полинома

Построить полином, определяющий зависимость скорости движения судна от глубины хода трала и длины вытравленных ваеров $v_s = f(h, L)$.

Глубину движения трала принять в пределах 200 – 300 м,
длину ваеров – в пределах 400 – 700 м.

7. Материалы, представляемые на защиту

1. Таблица кодирования факторов и формулы обратного перехода – от кодированных факторов к натуральным.
2. План эксперимента и расчётная матрица для двухфакторной нелинейной модели.
3. План эксперимента и расчётная матрица для плана $M \times M$.
4. Расчёт коэффициентов полиномов и оценка значимости при 5 % ошибке в опытах.

8. Контрольные вопросы и задания для самопроверки

1. Перечислите особенности статистической обработки экспериментальной априорной информации.
2. В каком виде может быть представлена априорная информация, позволяющая построить полиномиальную одно- двух- и трёхфакторную модель ?
3. Какие планы Вы можете рекомендовать для обработки априорной информации?
4. Какие требования предъявляются к априорной информации для её обработки методами планирования активного эксперимента?
5. Какие сложности встречаются при обработке априорной информации?
6. Что такое совместимость и управляемость факторов? Приведите пример несовместимости факторов.
7. Какие требования предъявляются к совокупности факторов?
8. Назовите планы эксперимента для построения линейных планов. Какими свойствами они обладают?
9. Что такое рандомизация опытов?
10. Как проверить воспроизводимость опытов? По какому критерию она оценивается?
11. По какому критерию оценивается значимость коэффициентов?
12. Что такое адекватность модели? По какому критерию она проверяется?
13. Какие данные необходимы для полной статистической обработки эксперимента?
14. Назовите достоинства и недостатки полного факторного эксперимента.
15. Какие планы применяются для построения квадратичных моделей?

9. Рекомендуемая литература

1. Солодов, В. С. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2012. – 204 с.
2. Солодов, В. С. Техническая диагностика радиоэлектронного оборудования и средств автоматики. Ч. 2. : учеб. пособие В. С. Солодов, Н. В. Калитёнов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2009. – 209 с. : ил.
3. Солодов, В. С. Идентификация комплекса судно-трал методами планирования активного эксперимента: монография / В. С. Солодов. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 2008. – 248 с. : ил.

4. Калитёнков, Н. В. Надёжность и диагностика транспортного радиооборудования и средств автоматики / Н. В. Калитёнков, В. С. Солодов : Учеб. пособие. – Москва : МОРКНИГА, 2012. – 521 с.

5. Шишло, Ю. В. Тактика пелагического тралового лова / Ю. В. Шишло. – Мурманск : Кн. изд-во, 1975. – 104 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО МУЛЬТИВИБРАТОРА МЕТОДОМ ПЛАНИРОВАНИЯ АКТИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель работы – ознакомить с методикой планирования активного эксперимента по четырём параметрам; обработкой экспериментальных данных, полученных в лабораторных условиях.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Принцип работы автоколебательного мультивибратора на операционном усилителе

Автоколебательный мультивибратор называют генератор прямоугольных импульсов. В его основе лежит триггер Шмита или компаратор с гистерезисом, но в отличие от триггера напряжение в мультивибраторе формируется интегрирующей RC -цепочкой. Ниже приведена схема мультивибратора на ОУ.

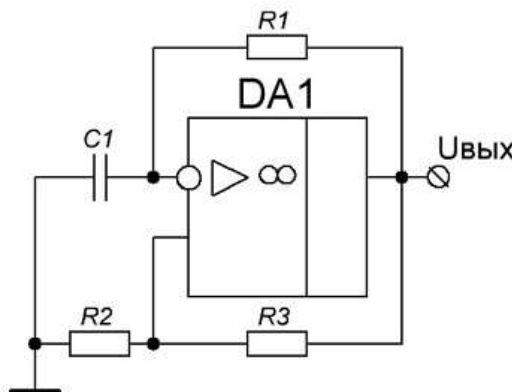


Рис. 1. Схема автоколебательного мультивибратора на операционном усилителе

Данный мультивибратор состоит из операционного усилителя DA1, который охвачен положительной обратной связью через резисторы R2, R3 и

отрицательной обратной связью при помощи интегрирующей цепочки $R1$, $C1$.

В основе работы мультивибратора лежит триггер Шмитта, который создается ПОС при помощи резисторов $R2, R3$. Так как опорное напряжение триггера равно нулю, то напряжение верхнего порогового уровня будет равно

$$U_{ВП} = U_{НАС+} \frac{R2}{R2 + R3}$$

а нижнего порога переключения триггера

$$U_{НП} = U_{НАС-} \frac{R2}{R2 + R3}$$

В момент подачи питания конденсатор полностью разряжен, то есть на инвертирующем входе ОУ напряжение равно нулю. В тоже время на выходе ОУ, вследствие неидеального ОУ, присутствует некоторое положительное напряжение, часть которого через ПОС $R2, R3$ поступает на неинвертирующий вход ОУ. Далее происходит усиление этого напряжения и на выходе ОУ происходит дальнейший рост напряжения.

Напряжение с выхода ОУ поступает также через цепочку $R1, C1$, но вследствие того, что интегрирующая цепочка задерживает сигнал, то рост напряжения на конденсаторе $C1$, а следовательно и на инвертирующем входе будет происходить медленнее, чем на неинвертирующем. В результате разность напряжений на инвертирующем и неинвертирующем входе будет расти, а следовательно будет происходить рост выходного напряжения.

В некоторый момент времени напряжение на конденсаторе U_C (а также на инвертирующем входе) достигнет напряжения верхнего порогового уровня $U_{ВП}$ триггера Шмитта и выходное напряжение $U_{ВЫХ}$ скачком станет равным отрицательному напряжению насыщения $U_{НАС-}$. В результате чего ток через резистор $R1$ изменится на противоположный, а конденсатор $C1$ начнёт разряжаться.

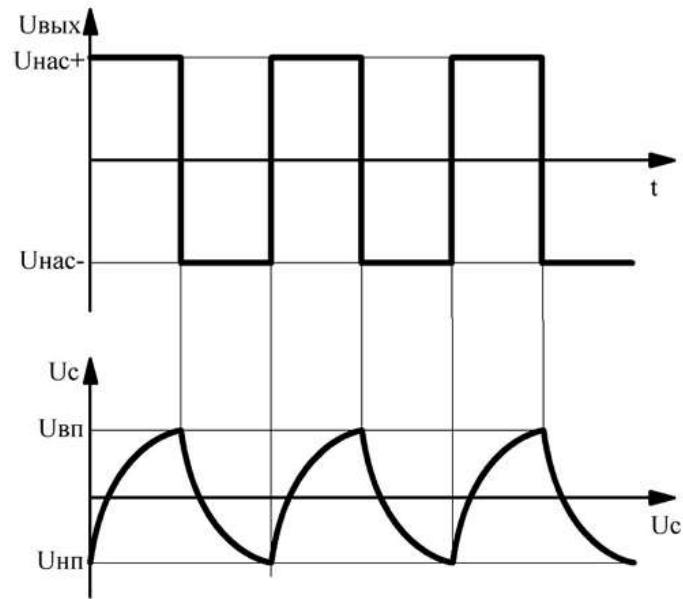


Рис. 2. График напряжений в мультивибраторе:
на выходе мультивибратора (верхний) и на конденсаторе $C1$ (нижний)

Разряд конденсатора будет происходить до напряжения нижнего порога переключения $U_{вп}$ триггера. После этого также скачкообразно произойдет переключение выходного напряжения с отрицательного насыщения к положительному напряжению насыщения $U_{нас+}$ триггера Шмитта. Данные переключения иллюстрирует график (рис. 2).

1.2. Особенности использования МПАЭ для обработки лабораторного эксперимента

Метод активного эксперимента в общем случае предполагает: *кодирование факторов; составление плана-матрицы эксперимента; рандомизацию опытов; реализацию плана эксперимента; проверку воспроизводимости опытов; оценку значимости коэффициентов регрессии; проверку адекватности модели.*

Особенностями построения математических моделей по экспериментальным данным, полученным в лабораторных условиях являются:

- выходная величина Y определяется практически без ошибок, и результаты каждого опыта точно воспроизводятся при его повторении, так как практически отсутствуют случайные воздействия. В связи с этим нет необходимости в проверке однородности выборочных дисперсий воспроизводимости, проведении рандомизации и дублировании опытов;
- возникает сложность при проведении оценки значимости коэффициентов и проверки адекватности математической модели.

В этом случае наиболее приемлемы следующие пути [1]:

- а) считать все коэффициенты значимыми;

б) оценку адекватности проводить на основе принятого уровня точности аппроксимации ε , что связано с искусственным введением дисперсии воспроизводимости опытов

$$s^2\{y\} = \varepsilon b_0, \quad (1)$$

где b_0 – нулевой коэффициент аппроксимирующего полинома.

Приняв в выражении (1) значение ε для выходного параметра, проверку адекватности модели можно произвести по F -критерию (Фишера).

К особенностям использования методов планирования эксперимента, проводимого в лабораторных условиях можно отнести и то, что в этом случае на проведение эксперимента – определение значений выходного параметра *не затрачивается много времени и ресурсов*, т. е. эксперимент не является дорогостоящим. Поэтому вопрос о минимизации количества необходимых опытов не стоит так остро, как при планировании натуральных экспериментов, нет необходимости использования дробного факторного эксперимента (ДФЭ).

2. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Имеется автоколебательный мультивибратор на ОУ, внутренние параметры $R_1, R_2; R_3, R_4; R_5, R_6$ и C_1, C_2 неизвестны. Переключателями типа «тумблер» S_1, S_2, S_3, S_4 можно дискретно изменять параметры, каждый на двух уровнях, как показано на рис. 3. В контрольной точке КТ1 можно измерять амплитуду пилообразного напряжения и частоту переключения мультивибратора, а в КТ2 частоту выходных импульсов.

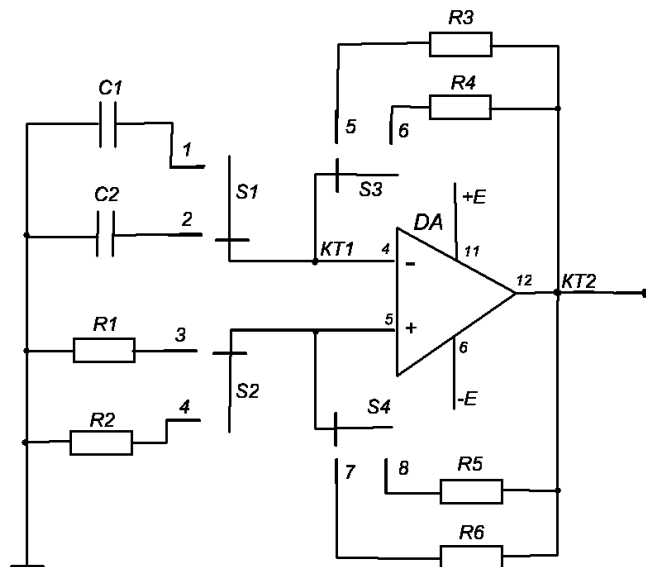


Рис. 3. Автоколебательный мультивибратор на операционном усилителе

Требуется определить влияние положения переключателей S_1, S_2, S_3 и S_4 на частоту прямоугольных импульсов в контрольной точке КТ2.

Оценить соотношения величин ёмкостей конденсаторов C_1 и C_2 , а также соотношение резисторов $R_1, R_2; R_3, R_4; R_5, R_6$, используя знаки $<, =, >$.

Пояснить процессы, протекающие в мультивибраторе при изменении параметров.

Для решения этой задачи использовать метод планирования активного эксперимента.

Таблица 1

Кодирование факторов

Уровень фактора S_i (положение тумблера)	S_1	S_2	S_3	S_4
Нижний уровень (верхнее положение тумблера)	1	3	5	7
Верхний уровень (нижнее положение тумблера)	2	4	6	8
Кодовое обозначение плана	x_1	x_2	x_3	x_4

3. ПЛАНИРОВАНИЕ И ПРОВЕДЕНИЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА 2^4

Ввиду того, что каждый тумблер может занимать только два положения, используем линейный план первого порядка 2^4 (табл.2), позволяющий построить полином вида

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4, \quad (2)$$

где x_i – кодированная переменная, b_0 – нулевой коэффициент аппроксимирующего полинома, $b_1 \dots b_4$ – линейные эффекты, b_{ij} – эффекты взаимодействия.

Таблица 2

Полный факторный эксперимент 2^4 в общепринятых (кодированных) обозначениях

Номер опыта	План эксперимента				Измерение
	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	–	–	–	–	f_1
2	–	–	+	–	f_2
3	–	+	–	–	f_3
4	–	+	+	–	f_4
5	+	–	–	–	f_5
6	+	–	+	–	f_6
7	+	+	–	–	f_7
8	+	+	+	–	f_8
9	–	–	–	+	f_9
10	–	–	+	+	f_{10}
11	–	+	–	+	f_{11}
12	–	+	+	+	f_{12}
13	+	–	–	+	f_{13}
14	+	–	+	+	f_{14}

15	+	+	–	+	f_{15}
16	+	+	+	+	f_{16}

В качестве выходного параметра принимаем частоту импульсов f , измеряемую электронным прибором типа *Visual DMM 740* в контрольной точке КТ2.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ 2⁴), представленный в табл. 2 после принятых обозначений имеет вид, изображённый в табл. 3.

Таблица 3

**Полный факторный эксперимент (ПФЭ 2⁴)
с указанием положений тумблеров**

Номер опыта	Положение переключателя				Частота импульсов f (КТ №2)
	S_1	S_2	S_3	S_4	
1	1	3	5	7	369
2	1	3	6	7	188
3	1	4	5	7	234
4	1	4	6	7	118
5	2	3	5	7	190
6	2	3	6	7	96
7	2	4	5	7	120
8	2	4	6	7	60
9	1	3	5	8	236
10	1	3	6	8	120
11	1	4	5	8	160
12	1	4	6	8	80
13	2	3	5	8	121
14	2	3	6	8	61
15	2	4	5	8	82
16	2	4	6	8	41

4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1. Проверка воспроизводимости опытов

В общем случае при одинаковом числе параллельных опытов на каждом сочетании уровней факторов воспроизводимость процесса проверяется по G -критерию Кохрена (1.13):

$$G = \frac{S_{u \max}}{\sum_{u=1}^n S_u^2} \leq G_{(0,05; f_u, f_u)},$$

где $s_u^2 = \frac{\sum_{p=1}^m (y_{u_p} - \bar{y}_u)^2}{m-1}$ – дисперсия, характеризующая рассеяние результатов опытов на u -м сочетании уровня факторов; $p = 1, 2, \dots, m$ – число параллельных опытов; $s_{u \max}^2$ – наибольшая из дисперсий в строках плана;

Учитывая $G_{(0,05;f_n,f_u)}$ – табличное значение критерия Кохрена при 5 %-м уровне значимости; $f_n = n$ – число независимых оценок дисперсии; $f_u = m-1$ – число степеней свободы каждой оценки, что опыты проводятся в лабораторных условиях, практически без наличия внешних факторов – рассеяния опытов близки к нулю. Следовательно, критерий Кохрена выполняется – процесс воспроизводим.

4.2. Расчёт коэффициентов регрессии

В случае воспроизводимости опытов коэффициенты регрессии рассчитываются по формулам (1.15)

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n y_u; \quad b_i = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} y_u; \quad b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} y_u,$$

где $n = 16$ – количество опытов в эксперименте.

В общем случае связь между входными параметрами (факторами) и частотой описывается полиномом вида

$$f^* = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + \\ + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4, \quad \text{Гц};$$

$$f^* = 142 - 46x_1 - 30x_2 - 47x_3 - 30x_4 + 9,8x_1x_2 + 14,9x_1x_3 + 9,5x_1x_4 + 9,6x_2x_3 + \\ + 8,5x_2x_4 + 9,6x_3x_4, \quad \text{Гц}.$$

Таблица 4

План и расчётная матрица эксперимента

Номер опыта	План					Расчёт						Изме- рение f	Вычис- ление f^*
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	+	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	369	356,9
2	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	188	194,7
3	+	–	+	–	–	–	+	+	–	–	+	234	241,1
4	+	–	+	+	–	–	–	+	+	–	–	118	117,4
5	+	+	–	–	–	–	–	–	+	+	+	190	196,5
6	+	+	–	+	–	–	+	–	–	+	–	96	94,0
7	+	+	+	–	–	+	–	–	–	–	+	120	120
8	+	+	+	+	–	+	+	–	+	–	–	60	55,7
9	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–	236	241,7
10	+	–	–	+	+	+	–	–	–	–	+	120	117,9
11	+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	160	159,9
12	+	–	+	+	+	–	–	–	+	+	+	80	74,5
13	+	+	–	–	+	–	–	+	+	–	–	121	119,3
14	+	+	–	+	+	–	+	+	–	–	+	61	55,1
15	+	+	+	–	+	+	–	+	–	+	–	82	76,7
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	41	50,9
Сумма	2276	– 734	– 486	– 748	– 474	156	238	152	154	136	154	$\sum(f - f^*)^2 = 534$	
b_i	b_0 142	b_1 – 46	b_2 – 30	b_3 – 47	b_4 – 30	b_{12} 9,8	b_{13} 14,9	b_{14} 9,5	b_{23} 9,6	b_{24} 8,5	b_{34} 9,6		

4.3. Оценка значимости коэффициента

Оценка значимости коэффициента регрессии производится с помощью t -критерия Стьюдента (Приложение 1.2 [1]).

Коэффициент считается значимым, если выполняется неравенство (1.17)

$$|b_i| \geq \Delta b_i = t_{(0,05;f_y)} \frac{s_y}{\sqrt{n}},$$

где $t_{(0,05;f_y)}$ – 5 %-я точка распределения критерия Стьюдента с f_y степенями свободы. Здесь $t_{(0,05;f_y)} = 2,228$ при $f_y = 16$ (Приложение 1.2 [1]).

Для проверки значимости коэффициентов и оценки адекватности модели принимаем ошибку опытов $S_y = 5\%$ от среднего значения $b_0 = 142$. Тогда $s_y = 7,1$; $s_y^2 = 50,4$.

$$\text{В данном случае } \Delta b_i = t \cdot \frac{\sqrt{s_y^2}}{\sqrt{n}} = 2,228 \frac{7,1}{4} = 3,95.$$

Следовательно, в полученном полиноме все коэффициенты признаются значимыми.

4.4. Оценка адекватности полиномиальной модели

Для оценки адекватности полинома измеренным данным произведём расчёт частоты в каждой точке опыта (1...16) и сравним отклонения расчётных данных от измеренных значений частоты $\sum(f - f^*)^2$.

Результаты вычисления и сравнения с экспериментальными данными сведём в табл. 5.

Таблица 5

Оценка адекватности модели

Номер опыта	Результат измерения	Результат вычисления	Отклонения $ f - f^* $	$ f - f^* ^2$
1	369	356,9	12,1	146,41
2	188	194,7	6,7	44,89
3	234	241,1	7,1	50,41
4	118	117,4	0,6	0,36
5	190	196,5	6,5	42,25
6	96	94,0	2,0	4,0
7	120	120	0	0
8	60	55,7	4,3	18,49
9	236	241,7	5,7	32,49
10	120	117,9	2,1	4,41
11	160	159,9	0,1	0,01
12	80	74,5	5,5	30,25
13	121	119,3	1,7	2,89
14	61	55,1	5,9	34,81
15	82	76,7	5,3	28,09

16	41	50,9	9,9	98,01
----	----	------	-----	-------

Сумма квадратов отклонений $\sum(f - f^*)^2 = 537,78$.

Критерий Фишера подтверждается, если $F \leq F_{\text{таб}}$.

$$S_{ao}^2 = \frac{\sum(Y - Y^*)^2}{n - k - 1} = \frac{537,78}{11} = 48,89$$

$$S_y^2 = 50,4$$

$$F = \frac{S_{ao}^2}{S_y^2} = \frac{48,89}{50,4} = 0,97 < F_{\text{ТАБ}} = 3,36. \text{ (Приложение 1.3 [1])}.$$

Следовательно, модель адекватна.

5. ПЛАНИРОВАНИЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПФЭ³

Трёхфакторная модель образуется, если какой-либо тумблер S_i (рис. 2) останется в фиксированном положении. Тогда образуются 8 вариантов *автоколебательного мультивибратора*.

Варианты задания	Варианты задания
1. S1 в положении 1. Варьируемые параметры S2, S3, S4.	5. S3 в положении 5. Варьируемые параметры S1, S2, S4.
2. S1 в положении 2. Варьируемые параметры S2, S3, S4.	6. S3 в положении 6. Варьируемые параметры S1, S2, S4.
3. S2 в положении 3. Варьируемые параметры S1, S3, S4.	7. S4 в положении 7. Варьируемые параметры S1, S2, S3.
4. S2 в положении 4. Варьируемые параметры S1, S3, S4.	8. S4 в положении 8. Варьируемые параметры S1, S2, S3.

5.1. Пример построения трёхфакторной полиномиальной модели

Тумблер S4 находится в положении 8 ($x_4 = +1$), согласно которому в цепь положительной обратной связи включен резистор R5. Варьируются параметры в цепи отрицательной обратной связи R1 и R2, C1 и C2, в цепи положительной ОС R3 и R4. Рассчитать коэффициенты и произвести статистическую обработку модели вида

$$f^* = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3.$$

Трёхфакторный план и расчётная матрица для такого случая представлен в табл. 6.

Таблица 6

Полный факторный эксперимент ПФЭ 2³

Опыт	План				Расчёт			Измерение
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	f
1	+	–	–	–	+	+	+	236
2	+	–	–	+	+	–	–	120
3	+	–	+	–	–	+	–	160
4	+	–	+	+	–	–	+	80
5	+	+	–	–	–	–	+	121
6	+	+	–	+	–	+	–	61
7	+	+	+	–	+	–	–	82
8	+	+	+	+	+	+	+	41
Сумма	X_0F	X_1F	X_2F	X_3F	X_1X_2F	X_1X_3F	X_2X_3F	
	901	–291	175,2	–301,6	56,8	95,2	55,2	
b_i	b_0	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}	
	112,6	–36,4	–21,9	–37,7	7,1	11,9	6,9	

$$f^* = 112,6 - 36,4x_1 - 21,9x_2 - 37,7x_3 + 7,1x_1x_2 + 11,9x_1x_3 + 6,9x_2x_3.$$

Вычислим значения выходного параметра f^* в каждом опыте согласно табл. 6.

1. $f^* = 112,6 + 36,4 + 21,9 + 37,7 + 7,1 + 11,9 + 6,9 = 234,5$ Гц;
2. $f^* = 112,6 + 36,4 + 21,9 - 37,7 + 7,1 - 11,9 - 6,9 = 121,8$ Гц;
3. $f^* = 112,6 + 36,4 - 21,9 + 37,7 - 7,1 + 11,9 - 6,9 = 162,7$ Гц
4. $f^* = 112,6 + 36,4 - 21,9 - 37,7 - 7,1 - 11,9 + 6,9 = 77,3$ Гц;
5. $f^* = 112,6 - 36,4 + 21,9 + 37,7 - 7,1 - 11,9 + 6,9 = 123,7$ Гц;
6. $f^* = 112,6 - 36,4 + 21,9 - 37,7 - 7,1 + 11,9 - 6,9 = 58,3$ Гц;
7. $f^* = 112,6 - 36,4 - 21,9 + 37,7 + 7,1 - 11,9 - 6,9 = 80,3$ Гц;
8. $f^* = 112,6 - 36,4 - 21,9 - 37,7 + 7,1 + 11,9 + 6,9 = 42,8$ Гц.

Для проверки адекватности модели сравним экспериментальные данные с расчётными данными табл. 7.

Таблица 7

Оценка адекватности модели

Номер опыта	Результат измерения	Результат вычисления	Отклонения $ f - f^* $	$ f - f^* ^2$
1	236	234,5	1,5	2,25
2	120	121,8	1,8	3,24
3	160	162,7	2,7	7,29
4	80	77,3	2,7	7,29
5	121	123,7	2,7	7,29
6	61	58,3	2,7	7,29
7	82	80,3	1,7	2,89
8	41	42,8	1,8	3,24

Определим сумму квадратов

$$\sum (F - F^*)^2 = 40,78.$$

Критерий Фишера подтверждается, если $F \leq F_{\text{таб}}$.

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum (Y - Y^*)^2}{n - k - 1} = \frac{40,78}{4} = 10,195.$$

Зададим 5 %-ю ошибку эксперимента от $b_0 = 112,6$.

Тогда $S_y = 5,63$; $S_y^2 = 31,7$.

$$F = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_y^2} = \frac{10,195}{31,7} = 0,32 < F_{\text{ТАБ}} = 6,59 \text{ (Приложение 1.3 [1])}.$$

В таблице Приложения 1.3 $f_1 = n = 8$ – число наблюдений; $m = 3$ – число факторов; $f_2 = n - m - 1 = 4$.

Следовательно, модель адекватна результатам эксперимента.

5.2. Задание на построение трёхфакторной полиномиальной модели

Вариант 1

Тумблер S1 находится в положении 1 ($x_1 = -1$), согласно которому в цепь отрицательной обратной связи включен конденсатор C1. Варьируются параметры в цепи отрицательной обратной связи R1 и R2, в цепи положительной ОС: R3 и R4, R5 и R6. Рассчитать коэффициенты и произвести статистическую обработку модели вида

$$f^* = b_0 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4$$

План эксперимента и результаты измерения частоты импульсов представлены в табл. 8.

Таблица 8

Полный факторный эксперимент (ПФЭ 23) при $x_1 = -1$

Номер опыта	План эксперимента				Частота импульсов f (КТ №2)
	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	–	–	–	–	369
2	–	–	+	–	188
3	–	+	–	–	234

4	—	+	+	—	118
5	—	—	—	+	236
6	—	—	+	+	120
7	—	+	—	+	160
8	—	+	+	+	121

Вариант 2

Тумблер $S1$ находится в положении 2 ($x_1 = +1$), согласно которому в цепь отрицательной обратной связи включен конденсатор $C2$. Варьируются параметры в цепи отрицательной обратной связи $R1$ и $R2$, в цепи положительной ОС: $R3$ и $R4$, $R5$ и $R6$. Рассчитать коэффициенты и произвести статистическую обработку модели вида

$$f^* = b_0 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4.$$

План эксперимента и результаты измерения частоты импульсов представлены в табл. 9.

Таблица 9

Полный факторный эксперимент (ПФЭ 2^3)

Номер опыта	План эксперимента				Частота импульсов f (КТ №2)
	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	+	—	—	—	190
2	+	—	+	—	96
3	+	+	—	—	120
4	+	+	+	—	60
5	+	—	—	+	121
6	+	—	+	+	61
7	+	+	—	+	82
8	+	+	+	+	41

Вариант 3

Тумблер $S2$ находится в положении 3 ($x_2 = -1$). Варьируются параметры в цепи отрицательной обратной связи $C1$ и $C2$, $R3$ и $R4$, в цепи положительной ОС – $R5$ и $R6$. Рассчитать коэффициенты и произвести статистическую обработку модели вида

$$f^* = b_0 + b_1x_1 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{34}x_3x_4.$$

План эксперимента и результаты измерения частоты импульсов представлены в табл. 10.

Таблица 10

Полный факторный эксперимент (ПФЭ 2^3) при $x_2 = -1$

Номер опыта	План эксперимента				Частота импульсов f (КТ №2)
	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	—	—	—	—	369
2	—	—	+	—	188
3	+	—	—	—	190
4	+	—	+	—	96
5	—	—	—	+	236
6	—	—	+	+	120
7	+	—	—	+	121
8	+	—	+	+	61

Вариант 4

Тумблер $S2$ находится в положении 4 (+1). Варьируются параметры в цепи отрицательной обратной связи $C1$ и $C2$, $R3$ и $R4$, в цепи положительной ОС: $R5$ и $R6$. Рассчитать коэффициенты и произвести статистическую обработку модели вида

$$f^* = b_0 + b_1x_1 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{34}x_3x_4.$$

План эксперимента и результаты измерения частоты импульсов представлены в табл. 11.

Таблица 11

Полный факторный эксперимент (ПФЭ 2^3) при $x_2 = +1$

Номер опыта	План эксперимента				Частота импульсов f (КТ №2)
	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	—	+	—	—	234
2	—	+	+	—	118
3	+	+	—	—	120
4	+	+	+	—	60
5	—	+	—	+	160
6	—	+	+	+	80
7	+	+	—	+	82
8	+	+	+	+	41

Вариант 5

Тумблер $S3$ находится в положении 5 (–1). Варьируются параметры в цепи отрицательной обратной связи $C1$ и $C2$, в цепи положительной ОС: $R1$ и $R2$, $R5$ и $R6$. Рассчитать коэффициенты и произвести статистическую обработку модели вида

$$f^* = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{14}x_1x_4 + b_{24}x_2x_4$$

План эксперимента и результаты измерения частоты импульсов представлены в табл. 12.

Таблица 12

Полный факторный эксперимент (ПФЭ 2^3) при $x_3 = -1$					
Номер опыта	План эксперимента				Частота импульсов f (КТ №2)
	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	—	—	—	—	369
2	—	+	—	—	234
3	+	—	—	—	190
4	+	+	—	—	120
5	—	—	—	+	236
6	—	+	—	+	160
7	+	—	—	+	121
8	+	+	—	+	82

Вариант 6

Тумблер $S3$ находится в положении 6 ($x_3 = +1$). Варьируются параметры в цепи отрицательной обратной связи $C1$ и $C2$, в цепи положительной ОС: $R1$ и $R2$, $R5$ и $R6$. Рассчитать коэффициенты и произвести статистическую обработку модели вида

$$f^* = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{14}x_1x_4 + b_{24}x_2x_4.$$

План эксперимента и результаты измерения частоты импульсов представлены в табл. 13.

Таблица 13

Полный факторный эксперимент (ПФЭ 2^3) при $x_3 = +1$

Номер опыта	План эксперимента				Частота импульсов f (КТ №2)
	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	—	—	+	—	188
2	—	+	+	—	118
3	+	—	+	—	96
4	+	+	+	—	60
5	—	—	+	+	120
6	—	+	+	+	80
7	+	—	+	+	61
8	+	+	+	+	41

Вариант 7

Тумблер $S4$ находится в положении 7 ($x_4 = -1$). В цепь положительной ОС включен $R6$. Варьируются параметры в цепи отрицательной обратной

связи $C1$ и $C2$, $R3$ и $R4$, в цепи положительной ОС: $R1$ и $R2$. Рассчитать коэффициенты и произвести статистическую обработку модели вида

$$f^* = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3$$

План эксперимента и результаты измерения частоты импульсов представлены в табл. 14.

Таблица 14

Полный факторный эксперимент (ПФЭ 2^3) при $x_4 = -1$

Номер опыта	План эксперимента				Частота импульсов f (КТ №2)
	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	–	–	–	–	369
2	–	–	+	–	188
3	–	+	–	–	234
4	–	+	+	–	118
5	+	–	–	–	190
6	+	–	+	–	96
7	+	+	–	–	120
8	+	+	+	–	60

6. Материалы, представляемые на защиту

- 6.1. Схема исследуемой установки согласно заданному варианту.
- 6.2. Таблица кодирования факторов.
- 6.3. План эксперимента с результатами измерения частоты импульсов.
- 6.4. Полиномиальная модель и её статистическая обработка.
- 6.5. Краткие выводы по результатам исследования.

7. Вопросы и задания для самопроверки

1. Какой план называют полным факторным экспериментом?
2. Назовите основные преимущества полного факторного эксперимента.
3. Что такое рандомизация опытов, и с какой целью она проводится?
4. Что такое воспроизводимость опыта? По какому критерию она оценивается?
5. Напишите формулы расчёта коэффициентов линейной модели.
6. Как оценивается значимость коэффициентов полиномиальной модели?
7. Как проверяется адекватность линейной модели?
8. Какие косвенные оценки правомерности использования линейной модели вы знаете?
9. Что такое дробный факторный эксперимент, и для каких целей он проводится?
10. Приведите пример составления дробного факторного плана 2^{3-1} и матрицу планирования.

Рекомендуемая литература

1. Солодов, В. С. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2012. – 204 с. : ил.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

ПЛАНИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ИСПЫТАНИЙ СУДНА ПРИ ДВИЖЕНИИ В СВОБОДНОЙ ВОДЕ

Цель работы – ознакомиться со статистическими методами планирования активного эксперимента; проведением и обработки натурального эксперимента для построения линейных и квадратичных двухфакторных моделей; косвенной оценкой линейных планов, использованием несимметричных планов типа (2×3) .

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Модель объекта при проведении натурального эксперимента

Наиболее достоверная информация о характеристиках объекта может быть получена путем проведения его натуральных испытаний.

Натурные испытания технологических объектов связаны со значительными затратами времени, материальных и людских ресурсов. Поэтому возникает необходимость в организации испытаний как планируемого научного эксперимента, повышении эффективности и качества испытаний, в улучшении формы представления информации.

Рассматривается методика построения математических моделей объектов, основанная на использовании методов многофакторного планирования активного эксперимента (МПАЭ). МПАЭ позволяет спланировать эксперимент таким образом, чтобы при минимальных затратах времени и средств получить необходимую информацию об объекте, проверить достоверность этой информации, представить ее в форме удобной для практического использования.

На рис. 1 изображено схематическое представление модель объекта в виде «чёрного ящика»

Все переменные, определяющие состояние объекта, можно разделить на четыре группы (рис. 1).

1. Группа $Z = (z_1, \dots, z_m)$. В эту группу входят факторы, которые характеризуют качество сырья или промежуточных продуктов и не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования. К входным и промежуточным продуктам можно отнести исходные вещества или продукты предыдущих звеньев технологической цепи. Информация о значениях переменных этой группы получается в результате лабораторных анализов, измерений и т. п.

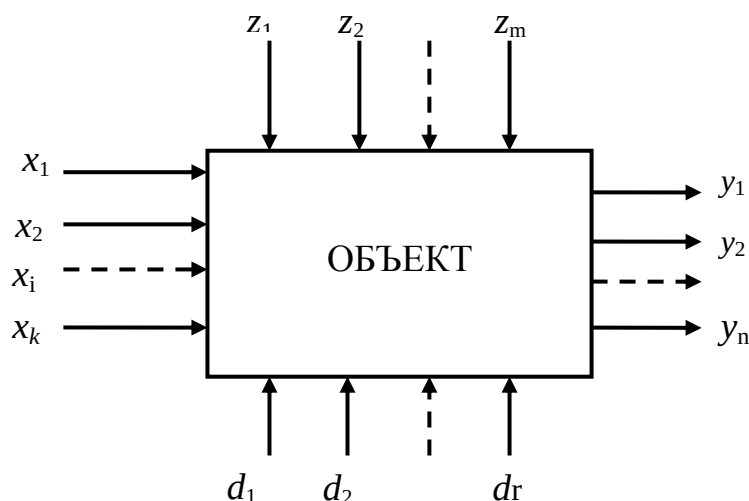


Рис. 1. Схема модели объекта

2. Группа $X = (x_1, \dots, x_k)$. Эту группу образуют управляемые факторы процесса. С их помощью реализуется заданный технологический режим. К ним относятся показания расходомеров, положения уставок регуляторов и т. п. На значения управляемых факторов накладываются технологические ограничения, т. е. ограничивается область их допустимых значений. Переменные этой группы называются контролируруемыми входными или независимыми переменными процесса.

3. Переменные группы $Y = (y_1, \dots, y_n)$ называют выходными. К их числу относятся величины, характеризующие экономическую эффективность процесса, а также технико-экономические параметры, технологические свойства и характеристики готовых продуктов. Часто задача состоит в том, чтобы определить зависимость между входными и выходными переменными процесса или найти

значения входных факторов, обеспечивающие достижение экстремума некоторой выходной переменной (при каких-то ограничениях). Это означает, что переменные этой группы часто выступают в качестве целевых величин при оптимизации процессов. Выходные переменные в некоторых случаях могут быть качественными и принимать лишь конечное число дискретных значений (например, устойчивость или неустойчивость какого-либо процесса). Выходными переменными могут быть показатели качества переходного процесса системы автоматического регулирования (время регулирования t_p , величина перерегулирования σ , количество колебаний m).

4. Четвертую группу $D = (d_1, \dots, d_r)$ образуют неконтролируемые факторы. Они характеризуют действующие на объект возмущения, которые не могут быть измерены количественно (неконтролируемые примеси в сырье, старение катализатора и т. д.). Воздействие неконтролируемых факторов, медленно изменяющихся во времени, приводит к дрейфу характеристик объекта.

При ограниченных знаниях о процессе аналитическое выражение функции отклика неизвестно. Поэтому приходится ограничиться математической моделью в виде полинома (1)

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \tilde{x}_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} \tilde{x}_i^2 + \dots \quad (1)$$

В результате эксперимента получают коэффициенты b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} , которые являются оценками теоретических коэффициентов $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}, \beta_{ii}$ полинома

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i \tilde{x}_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} \tilde{x}_i^2 + \dots$$

Вопрос построения планов и получение математической модели, адекватной изучаемому объекту исследования, является важнейшим вопросом в теории планирования эксперимента.

Так как степень полинома, описывающего процессы в реальном объекте заранее предсказать нельзя, то пользуются *идеей шагового поиска*, т. е. сначала пытаются описать исследуемое явление самой простой – линейной моделью. Если линейная модель окажется неудовлетворительной, то увеличивают число членов полинома, т. е. повышают его степень. Процесс продолжают до тех пор, пока не будет получена модель, адекватно описывающая результаты эксперимента.

1.2. Требования к параметрам при проведении натурного эксперимента

1.2.1. Требования к выходным параметрам процесса

Параметр оптимизации (выходной параметр) желательно иметь таким, чтобы он однозначно и с достаточной полнотой характеризовал эффективность объекта исследования. Следует стремиться к тому, чтобы параметр был только один, мог оцениваться количественно с максимальной статистической эффективностью и имел ясный физический смысл. Иногда параметр оптимизации приходится изменять из-за технических трудностей, например в связи с отсутствием достоверных методов оценки.

В ряде случаев требуется выявить количественную зависимость между параметрами процесса. В таких случаях рассматривается выходной параметр как реакция (отклик) на воздействия факторов, которые определяют поведение изучаемой системы. В таких случаях выходных параметров, характеризующих процесс, может быть несколько.

Параметры оптимизации в технологических системах могут быть экономическими, технико-экономическими, статистическими и т. д. Параметр оптимизации должен удовлетворять следующим требованиям:

- быть количественным и задаваться одним числом; допускать изменение при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов (множество значений, которые принимает параметр оптимизации, называется областью его определения);
- быть универсальным, т. е. всесторонне характеризовать объект исследования;
- иметь простой физический смысл;
- существовать для всех стадий проведения эксперимента;
- быть эффективным – это требование сводится к выбору параметра оптимизации для технической системы, который определяется с наибольшей возможной точностью, наглядностью результатов, удобством пользования, однозначностью и т. д.

1.2.2. Требования к варьируемым переменным (факторам)

После того как выбраны объект исследования и выходные параметры процесса (параметр оптимизации), необходимо включить в рассмотрение все существующие факторы, которые могут оказывать воздействия на исследуемый объект. Факторы могут быть управляемыми и неуправляемыми. В настоящей работе рассматриваются только управляемые факторы, которые позволяют задавать им некоторое конкретное значение и поддерживать это

значение в течение заданного времени. Число выбранных факторов обуславливает размерность изучаемого факторного пространства.

Желательно, чтобы факторы имели количественную оценку, хотя планирование эксперимента возможно, если некоторые факторы представлены качественно.

К совокупности факторов предъявляются следующие требования.

Независимость, т. е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов. Если это условие невыполнимо, то планировать эксперимент невозможно.

Совместимость. При планировании эксперимента обычно одновременно изменяется несколько факторов. Поэтому очень важно сформулировать требования, которые предъявляются к совокупности факторов. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны. Изучение априорной информации помогут выбрать диапазоны изменения в той области, которая наиболее интересна исследователю.

Управляемость. Это значит, что исследователь, выбрав нужное значение фактора, может его поддерживать постоянным в течение всего опыта, т. е. может управлять фактором.

Точность замера. Если факторы измеряют с большой ошибкой или значения факторов трудно поддерживать на заданном уровне (уровень фактора «плывёт»), то экспериментатору следует обратиться к другим методам исследования объекта.

Однозначность, т. е. непосредственное воздействие факторов на объект. Трудно управлять фактором, который является функцией других факторов. Но в планировании могут участвовать и сложные факторы, состоящие из нескольких простых факторов.

2. Построение полиномиальной модели по испытания судна в режиме свободного хода

2.1. Пример построения линейной модели судна в режиме свободного хода

Выбор факторов. В типовую программу исследований комплекса «судно – трал» входит расчёт характеристик судна на свободном ходу при переходе на промысел. Основной целью исследования до внедрения в практику испытаний МПАЭ являлось построение зависимостей мощности на гребном валу и часового расхода топлива от **скорости судна**. По мере применения МПАЭ для исследования судов изменился подход к проведению испытаний судов. В качестве входного параметра стали использовать положение **вариатора управления шагом винта (ВУШ)** и **курсовой угол ветра q_R** . Эти параметры можно изме-

нять независимо друг от друга, фиксировать в заданном положении и измерять достаточно точно. Скорость судна стал рассматриваться как выходной параметр процесса исследований.

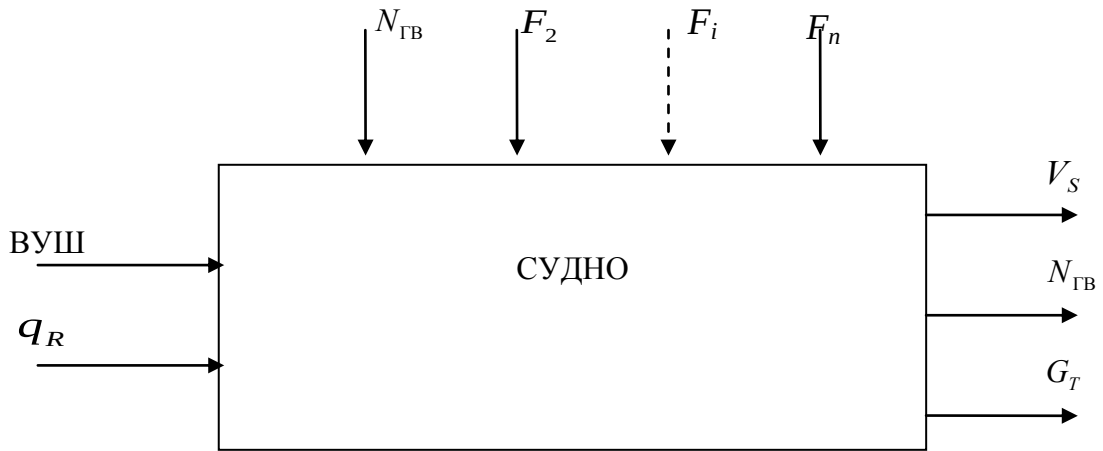


Рис. 2. Модель судна в режиме свободного хода

На рис. 2 изображена модель судна, используемая при его исследовании в режиме свободного хода.

На рисунке обозначены:

ВУШ – положение рукоятки управления винтом регулируемого шага (измеряется указателем шага винта);

q_R – курсовой угол ветра (измеряется датчиком курса);

V_s – скорость судна (измеряется штатным судовым лагом.);

$N_{ГВ}$ – мощность на гребном валу (измеряется тензодатчиками);

G_T – часовой расход топлива (определяется при помощи мерного бака, ёмкостью 30 л и секундомера).

Все опыты проводились при волнении моря два балла, ветре 6 м/с, течении 0,34 уз.

Отбор мощности от главного двигателя на валогенератор переменного тока поддерживался постоянным $P_B = 80$ кВт.

Пробный ход судна ВУШ = 6,8, мощность на гребном валу $N_{ГВ} = 1620$ кВт, скорость судна $V_s = 14$ уз, расход топлива 364 кг/ч.

Пробные движения судна позволили выбрать диапазон варьирования факторов ВУШ, q_R и обеспечить совместимость факторов.

Кодирование факторов. Уровни факторов, их кодированные и натуральные значения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Кодирование факторов

Интервал варьирования и уровень фактора	ВУШ	q_R
--	-----	-------

Верхний уровень $x_i = +1$	6,8	Встречный ветер, 0°
Нижний уровень $x_i = -1$	2,0	По ветру, 180°
Нулевой уровень $x_i = 0$	4,4	Движение лагом, 90°
Интервал варьирования Δi	2,4	90°
Кодовое обозначение	ВЎШ	$\tilde{q}_R$

Связь между кодовыми и натуральными выражениями факторов согласно (1.5) задается формулами

$$\tilde{\text{ВЎШ}} = (\text{ВУШ} - \text{ВУШ}_0) / \Delta \text{ВУШ} = (\text{ВУШ} - 4,4) / 2,4;$$

$$\tilde{q}_R = (90 - q_R) / 90.$$

2.2. Планирование и проведение эксперимента

План эксперимента, приведенный в табл. 2, является ортогональным планом первого порядка. Основным преимуществом такого плана является раздельная (независимая) оценка коэффициентов регрессии.

Таблица 2

План эксперимента ПФЭ 2^2

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{\text{ВЎШ}}$	$\tilde{q}_R$	У1	У2
1	-1	-1	$Y_{1,1}$	$Y_{2,1}$
2	-1	+1	$Y_{1,2}$	$Y_{2,2}$
3	+1	-1	$Y_{1,3}$	$Y_{2,3}$
4	+1	+1	$Y_{1,4}$	$Y_{2,4}$

Рандомизация опытов

Ввиду того, что на судно оказывают влияние не только ВУШ и q_R , но и еще ряд неизвестных нам факторов, вносим элемент случайности влияния этих факторов на результат эксперимента. Это необходимо для обоснованного использования аппарата математической статистики, устанавливается случайный порядок постановки опытов во времени. В нашем примере по таблице случайных чисел [1], [2] получили такую последовательность проведения опытов: 2, 1, 3, 4, 1, 3, 2, 4.

Для построения математической модели – зависимости скорости судна v , мощности на гребном валу N и расхода топлива G_T от значения ВУШ и курсово-

го угла ветра (относительное) используем ПФЭ 2^2 (табл. 2). Результаты опытов сведены в табл. 3.

Таблица 3

**Результаты опытов и вычисление
средних значений выходных параметров**

Номер опыта	v_1 , уз	v_2 , уз	$\bar{v}$, уз	N_1 , кВт	N_2 , кВт	$\bar{N}$, кВт	G_1 , кг/ч	G_2 , кг/ч	$\bar{G}$, кг/ч
1	4,9	5,5	5,2	258	264,6	260,0	98,5	101,5	100,0
2	14,0	13,4	13,7	1 430	1 350	1 390	338	322	330,0
3	4,4	4,0	4,2	328	352	340	125	119	122,0
4	12,1	12,9	12,5	1 435	1 505	1 470	356	342	349,0

2.3. Проверка воспроизводимости опытов и расчет коэффициентов

При одинаковом числе параллельных опытов на каждом сочетании уровней факторов воспроизводимость процесса проверяется по критерию Кохрена [2]. Согласно (1.13)

$$G = \frac{s_{u \max}}{\sum_{u=1}^n s_u^2} \leq G_{(0,05; f_n, f_u)}, \quad (2)$$

где $s_u^2 = \frac{\sum_{p=1}^m (y_{u_p} - \bar{y}_u)^2}{m-1}$ – дисперсия, характеризующая рассеяние результатов опытов на u -м сочетании уровня факторов; $p = 1, 2, \dots, m$ – число параллельных опытов; $s_{u \max}^2$ – наибольшая из дисперсий в строках плана; $G_{(0,05; f_n, f_u)}$ – табличное значение критерия Кохрена при 5 %-ом уровне значимости; $f_n = n$ – число независимых оценок дисперсии; $f_u = m - 1$ – число степеней свободы каждой оценки.

2.4. Пример построения линейной модели судна

2.4.1. Проверка воспроизводимости опытов при построении полиномиальной зависимости $v = f(\text{ВУШ}, q_R)$.

Построим полиномиальную модель, устанавливающую зависимость скорости судна от положения ВУШ и направления судна относительно курсового угла ветра $v = f(\text{ВУШ}, q_R)$.

В рассматриваемом примере выполнялись по два определения величины V_u , поэтому значение оценок дисперсии в каждой точке плана рассчитываем по формуле $s_u^2 = \Delta^2 / 2$.

Таким образом, для скорости судна имеем значения дисперсий

$$s_1^2 = \frac{(5,5 - 4,9)^2}{2} = 0,18; \quad s_2^2 = \frac{(14,0 - 13,4)^2}{2} = 0,18.$$

Аналогично $s_3^2 = 0,08$ и $s_4^2 = 0,32$.

$$G_{расч} = \frac{0,32}{0,18 + 0,18 + 0,08 + 0,32} = 0,42.$$

Процесс **воспроизводим**, так как неравенство (2) выполняется:

$$G_{расч} = 0,42 < G_{(0,05;4;1)} = 0,9065.$$

Определим дисперсию воспроизводимости (ошибку опыта):

$$s_y^2 = \frac{0,18 + 0,18 + 0,08 + 0,32}{4} = 0,19.$$

Расчёт коэффициентов регрессии

Рассчитаем коэффициенты регрессии по формулам (3):

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n \bar{y}_u; \quad b_i = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} \bar{y}_u; \quad b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u. \quad (3)$$

$$b_0 = 8,9; \quad b_1 = 4,2; \quad b_2 = -0,55; \quad b_{12} = 0,05.$$

Проверка адекватности линейной модели $v^* = f(\text{ВУШ}, q_R)$

Проверка адекватности линейной модели выполняется с помощью критерия Фишера. для рассматриваемого примера выполняется в следующем порядке. По полученному полиному

$$v^* = 8,9 + 4,2\tilde{\text{ВУШ}} - 0,55\tilde{q}_R + 0,05\tilde{\text{ВУШ}} \cdot \tilde{q}_R, \text{ уз}$$

находим расчётные значения скорости v^* . Все последующие расчёты сведём в табл. 4.

Таблица 4

Проверка адекватности линейной модели скорости судна

Опыт и	План		$\bar{v}_u, \text{уз}$	$v^*_{u, \text{уз}}$	$(\bar{v}_u - v^*_{u})^2, \text{уз}$
	$\tilde{B}\tilde{U}\tilde{Ш}$	$\tilde{q}_R$			
1	-1	-1	5,2	5,3	0,01
2	-1	+1	13,7	13,6	0,01
3	+1	-1	4,2	4,1	0,01
4	+1	+1	12,5	12,6	0,01

Критерий Фишера при дисперсии адекватности $s_{\text{ад}}^2 = \frac{0,04}{4-2-1} = 0,04$ равен $F = 4,4 < F_{(0,05;1;4)} = 7,7086$, следовательно, модель адекватна.

Оценка значимости коэффициента регрессии производится с помощью t -критерия Стьюдента (Приложение 2).

Коэффициент считается значимым, если выполняется неравенство (1.17)

$$\Delta b_i = t_{(0,05;f_y)} \frac{S_y}{\sqrt{n}} = 2,78 \cdot \frac{\sqrt{0,19}}{\sqrt{4}} = 0,506$$

где $t_{(0,05;f_y)}$ – 5 %-я точка распределения критерия Стьюдента с f_y степенями свободы. В данном случае $\Delta b_i = 0,506$.

Все полученные по расчету коэффициенты регрессии, кроме $b_{12} = 0,05$, признаются значимыми. Незначимый коэффициент при факторе означает, что данный фактор не влияет (или влияет незначимо) на скорость судна. Заметим, что на величину коэффициента регрессии влияет не только роль данного фактора, но и выбранный интервал варьирования. Это значит, что при очень узких пределах изменения фактора в эксперименте его вклад в изменение параметра оптимизации может быть действительно очень малым. Статистический сигнал о незначимости фактора говорит о том, что эксперимент проводился при слабом ветре – 6 м/с, волнении моря два балла. Зависимость скорости судна от положения выносного указателя шага винта и курсового угла ветра адекватно описывается линейной моделью

$$v^* = 8,9 + 4,2\tilde{B}\tilde{U}\tilde{Ш} - 0,55\tilde{q}_R, \text{уз}$$

Произведём *косвенную оценку* суммарного эффекта квадратичных членов. Дополнительный опыт в центре плана при $\tilde{B}\tilde{U}\tilde{Ш} = \tilde{v} = 0$ показывает удовлетворительные результаты (5-я точка плана): $v = 8,9$ уз

Выполняется неравенство

$$|b_0 - v_0| < t_{(0,05;f_y)} \cdot$$

Это означает, что суммарный вклад квадратичных эффектов равен нулю.

Вывод: зависимость скорости судна от значений выносного указателя шага винта удовлетворительно описывается линейной моделью (рис. 3).

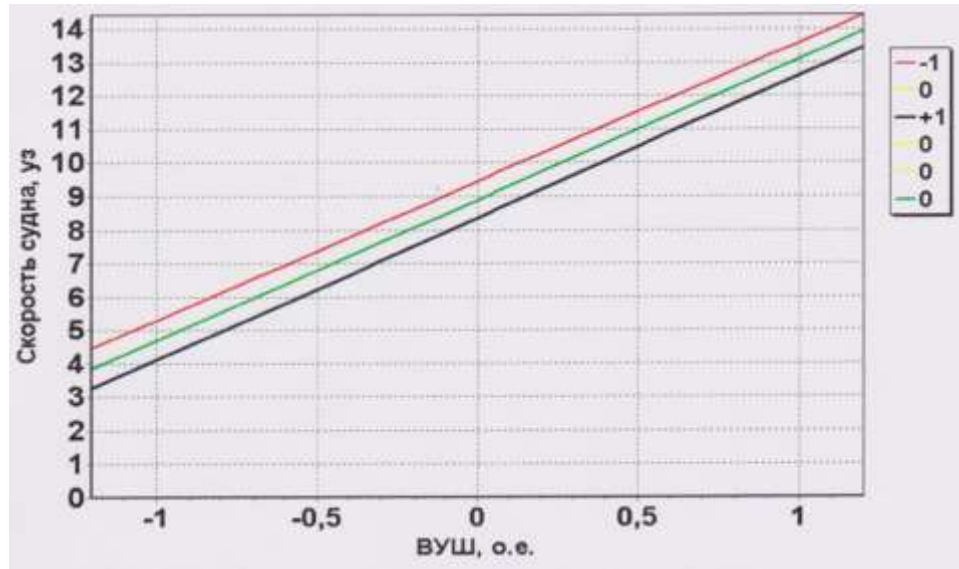


Рис. 3. График зависимости скорости судна от положения ВУШ при движении судна на контркурсах

2.4.2. Проверка воспроизводимости опытов при построении полиномиальной зависимости $N = f(\text{ВУШ}, q_R)$

Проверка воспроизводимости опытов при построении зависимости мощности на гребном валу от положения ВУШ и курса судна $N_{ГВ} = f(\text{ВУШ}, q_R)$

Проведём анализ зависимости мощности на гребном валу $N_{ГВ}$ от тех же факторов и результаты замеров мощности сведём в табл. 5.

Таблица 5

План и результаты опытов при построении модели $N_{ГВ} = f(\text{ВУШ}, q_R)$

Опыт, и	ВУШ	$\tilde{q}_R$	$\tilde{\text{ВУШ}} \cdot \tilde{q}_R$	$N_{ГВ1},$ кВт	$N_{ГВ2},$ кВт	$\bar{N}_{ГВ},$ кВт
1	-1	-1	+1	258	264,6	261,3
2	+1	-1	-1	1 430	1 350	1 390
3	-1	+1	-1	328	352	340
4	+1	+1	+1	1 435	1 505	1 470

Проверку воспроизводимости опытов проводим по (1.13). Максимальная дисперсия во втором опыте.

$$s_{u1}^2 = \frac{(258 - 264,6)^2}{2} = 21,78; \quad s_{u2}^2 = \frac{(1\,430 - 1\,350)^2}{2} = 3\,200$$

$$s_{u3}^2 = \frac{(352 - 328)^2}{2} = 288; \quad s_{u4}^2 = \frac{(1\,505 - 1\,435)^2}{2} = 2\,450.$$

$$G = \frac{3\,200}{21,78 + 3\,200 + 288 + 2\,450} = \frac{3\,200}{5\,959} = 0,5369$$

Процесс воспроизводим, так как $G < G_{\text{табл}}$

$$G = 0,5369 < G_{(0,05;4;1)} = 0,9065.$$

$$\text{Дисперсия воспроизводимости } s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n s_u^2. \quad s_y^2 = \frac{5\,959}{4} = 1\,490.$$

Рассчитаем коэффициенты регрессии по формулам (1.15).

В данном случае:

$$b_0 = 901,7; \quad b_1 = 587,05; \quad b_2 = 47,3; \quad b_{12} = -6,05.$$

Оценим значимость коэффициентов регрессии согласно (1.17).

В данном случае $\Delta b_i = 9,87$.

Все полученные коэффициенты регрессии, кроме b_{12} , значимы, так как $|b_i| > 9,87$.

Проверим адекватность модели $N_{\text{ГВ}} = 901,7 + 587 \text{ ВЎШ} + 47,3 \tilde{q}_R$, кВт по критерию Фишера (табл. 6).

Таблица 6

Проверка адекватности линейной модели $N_{\text{ГВ}} = f(\text{ВЎШ}, \tilde{q}_R)$

Опыт	$\bar{N}_{\text{ГВ}},$ кВт	$N_{\text{ГВ}}^*,$ кВт	$ \bar{N}_{\text{ГВ}} - N_{\text{ГВ}}^* ^2,$ кВт
1	260	267,7	59,3
2	1 390	1 441,7	38,4
3	340	362,3	32,5
4	1 470	1 536,3	39,7
5	952	902	250

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum (\bar{N}_u - \hat{N}_u)^2}{n - k - 1}; \quad s_{\text{ад}}^2 = \frac{59,3 + 38,4 + 32,5 + 39,7}{4 - 2 - 1} = 169,9;$$

$$F_{\text{расч}} = \frac{169,9}{1490} = 0,1140 < F_{(0,05;1;4)} = 7,7086.$$

Расчётное значение $F_{\text{расч}}$ меньше табличного, следовательно, линейная модель адекватна.

Произведём *косвенную оценку* суммарного эффекта квадратичных членов полинома. Поставив дополнительный опыт в нулевой точке плана, обнаруживаем существенное расхождение значений мощности измеренной и вычисленной в 5-й точке плана $(N_{\text{ГВ}5} - N_{\text{ГВ}5}^*)^2 = 250$. Расхождение между измеренным $N_{\text{ГВ}}$ и вычисленным значением $N_{\text{ГВ}}^*$ в центре плана является **сигналом о неблагопо-**

лучной аппроксимации зависимости мощности на гребном валу от положения ВУШ и q_R линейной моделью. Приемлемой точности аппроксимации можно добиться использованием плана второго порядка, позволяющим определить квадратичные эффекты, т. е. коэффициент b_{11} при ВУШ².

2.5. Планирования эксперимента для построения квадратичных полиномов

2.5.1. Ортогональный центральный композиционный план второго порядка.

В ортогональном плане второго порядка (ОЦКП) к ядру, представляющему собой план ПФЭ 2ⁿ, добавляются центральные точки ($x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$) и по две «звёздные» точки для каждого фактора ($x_j = 0, j \neq i$).

В табл. 7 приведён ОЦКП второго порядка для двух факторов: ВУШ и q_R . В качестве выходного параметра рассматривалась мощность на гребном валу $N_{ГВ}$.

Таблица 7

Ортогональный центральный композиционный план второго порядка ОЦКП 2

Опыт <i>u</i>	План		Расчётная матрица				
	ВУШ	q_R	ВУШ ² – 2/3	$\tilde{q}_R^2 - 2/3$	ВУШ · $\tilde{q}_R$	$\bar{N}$, кВт	$\hat{N}$, кВт
1	–	–	1/3	1/3	+	260	260,8
2	–	+	1/3	1/3	–	340	337,4
3	+	–	1/3	1/3	–	1 390	1 390,8
4	+	+	1/3	1/3	+	1 470	1 467,4
5	0	–	–2/3	1/3	0	930	924,1
6	0	+	–2/3	1/3	0	1 000	1 000,7
7	–	0	1/3	–2/3	0	300	299,1
8	+	0	1/3	–2/3	0	1 430	1 429,1
9	0	0	–2/3	–2/3	0	960	963,4

2.5.2. Расчёт коэффициентов модели

Двухфакторный полином в общем виде

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \tilde{x}_1 + b_2 \tilde{x}_2 + b_{12} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + b_{11} \tilde{x}_1^2 + b_{22} \tilde{x}_2^2.$$

Расчет коэффициентов полинома производится по формулам (1.25)

$$b_0 = b'_0 - 2/3(b_{11} + b_{22}); \quad b_{ii} = (1/2) \sum_{u=1}^9 (x_{iu} - 2/3)y_u;$$

$$b'_0 = \frac{1}{9} \sum_{u=1}^9 y_u; \quad b_i = (1/6) \sum_{u=1}^9 x_{iu} y_u; \quad b_{ij} = 1/4 \sum_{i \neq j} x_{iu} x_{ju} y_u.$$

Дисперсии коэффициентов для плана ОЦКП определяется по формулам (1.25, а)

$$s^2 \{b_0\} = \frac{5}{9} s_y^2; \quad s^2 \{b_1\} = s^2 \{b_2\} = \frac{s_y^2}{6};$$

$$s^2 \{b_{11}\} = s^2 \{b_{22}\} = \frac{s_y^2}{2}; \quad s^2 \{b_{12}\} = \frac{s_y^2}{4}.$$

Коэффициенты значимо отличаются от нуля, если выполняется неравенство

$$|b| > t s\{b\}.$$

Аппроксимирующий полином для двух факторов имеет вид

$$\hat{N} = 962,4 + 565\tilde{V}\tilde{U}\tilde{I} + 38,3\tilde{q}_R - 98,3\tilde{V}\tilde{U}\tilde{I}^2 + 1,7\tilde{q}_R^2, \text{ кВт.}$$

После удаления незначимого коэффициента $b_{22}^2 = 1,7$ получим более компактный полином

$$\hat{N} = 962,4 + 565\tilde{V}\tilde{U}\tilde{I} + 38,3\tilde{q}_R - 98,3\tilde{V}\tilde{U}\tilde{I}^2, \text{ кВт.}$$

Отсутствие квадратичного коэффициента при q_R говорит о том, что для построения неполного квадратичного полинома можно использовать более экономичный план – типа М×М (3×2).

3. Пример использования несимметричного плана эксперимента для построения модели судна в режиме свободного хода

Ввиду отсутствия квадратичных эффектов от влияния курсового угла ветра q_R на ПСТ проекта 1332 был проведён эксперимент с использованием несимметричного плана, при котором положение ВУШ изменялось на трёх уровнях, а курсовой угол ветра q_R – на двух уровнях. В табл. 8 приведён план, результаты опытов, расчётная матрица и вычисленные значения мощности.

Произведём расчёт коэффициентов модели и оценку их значимости

$$b_0 = 0,5(0Y) - 0,5(22Y) = 1\,008;$$

$$b_1 = 0,16667(1Y) = 39,7;$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= 0,25(2Y) = 587; \\
 b_{22} &= 0,75(22Y) - 0,5(0Y) = -106,5; \\
 b_{12} &= 0,25(12Y) = -6.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Таблица 8

План эксперимента 2×3 и расчётная матрица

Но- мер опыта	План		Изме- ренное значение	Расчётная матрица				Вычис- ленное значе- ние
	$\tilde{q}_R$	$\tilde{B\ddot{U}III}$		$\tilde{q}_K \bar{N}$	$\tilde{B\ddot{U}III} \cdot \bar{N}$	$\tilde{B\ddot{U}III}^2 \cdot \bar{N}$	$\tilde{q}_R \tilde{B\ddot{U}III} \cdot \bar{N}$	
1	-1	-1	261	-261	-261	261	261	275,2
2	+1	-1	368	368	-368	368	-368	354,2
3	-1	+1	1 447	-1 447	1 447	1 447	-1 447	1 449,4
4	+1	+1	1 530	1 530	1 530	1 530	1 530	1 528,4
5	-1	0	984	-984	0	0	0	968,8
6	+1	0	1 032	1 032	0	0	0	1 047,8
			(0Y) 5 622	(1Y) 238	(2Y) 2 348	(22Y) 3 606	(12Y) -24	

3.1.1. Расчёт коэффициентов и статистическая обработка модели

Рассчитав коэффициенты регрессии, получим полином

$$N^* = 1008 + 39,7\tilde{q}_R + 587\tilde{B\ddot{U}III} - 106,5\tilde{B\ddot{U}III}^2 - 6,\tilde{q}_R\tilde{B\ddot{U}III}, \text{ кВт.}$$

Определим ошибки определения коэффициентов модели:

$$\begin{aligned}
 s\{b_0\} &= \sqrt{A_0} \cdot s_y = \sqrt{0,5} \cdot s_y = 0,71 \cdot 18 = 12,78; \\
 s\{b_1\} &= \sqrt{A_1} \cdot s_y = \sqrt{0,16667} \cdot 18 = 7,35; \\
 s\{b_2\} &= \sqrt{A_2} \cdot s_y = \sqrt{0,25000} \cdot 18 = 9,0 \\
 s\{b_{22}\} &= \sqrt{A_{22}} \cdot s_y = \sqrt{0,75000} \cdot 18 = 15,6; \\
 s\{b_{12}\} &= \sqrt{A_{12}} \cdot s_y = \sqrt{0,25000} \cdot 18 = 9,0.
 \end{aligned}$$

Рассчитаем адекватность модели при 2 %-й ошибке эксперимента от среднего значения мощности $N_{cp} = (260 + 1\,530)/2 = 900$ кВт. Принимаем ошибку опыта $s_y = 18$ кВт.

Коэффициент $b_{12} = 6$ на два порядка меньше среднего значения мощности признаётся незначимым.

Окончательно получили полином

$$N^* = 1008,3 + 39,5\tilde{q}_R + 587,1\tilde{B\ddot{U}III} - 106,5\tilde{B\ddot{U}III}^2, \text{ кВт.}$$

3.1.2. Проверка адекватности модели

Для проверки адекватности модели вычислим значения $\hat{N}$ в точках плана (табл. 9) и сумму квадратов отклонений вычисленных значений от расчётных значений $SS_{\text{на}} = 881,44$

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - y^*_u)^2}{n - k - 1} = \frac{881,44}{3} = 294 ; s_y^2 = 88,1;$$

$$F = \frac{294}{88,1} = 3,34 < F_{(0,5;3;6)} = 4,76.$$

Таблица 9

Проверка адекватности модели

Номер опыта	План эксперимента		Измеренное значение	Вычисленное значение		
	$\tilde{q}_R$	ВУШ		$\hat{N}$	$ \bar{N} - N^* $	$ \bar{N} - N^* ^2$
1	-1	-1	261	275,2	14,2	201,64
2	+1	-1	368	354,2	13,8	190,44
3	-1	+1	1 447	1 449,4	2,4	5,76
4	+1	+1	1 530	1 528,4	1,6	2,56
5	-1	0	984	968,8	15,2	231,04
6	+1	0	1 032	1 047,8	15,8	249,64
						$SS_{\text{на}}$
						881,44

Вывод 1: Модель $N = f(q_R, \text{ВУШ})$, построенная по несимметричному плану (2×3) , адекватна.

Максимальное отклонение (невязка) в шестом опыте $\Delta = |\bar{N} - N^*| = 15,8$, что составляет менее 2 % от среднего значения мощности $b_0 = 1\,008$.

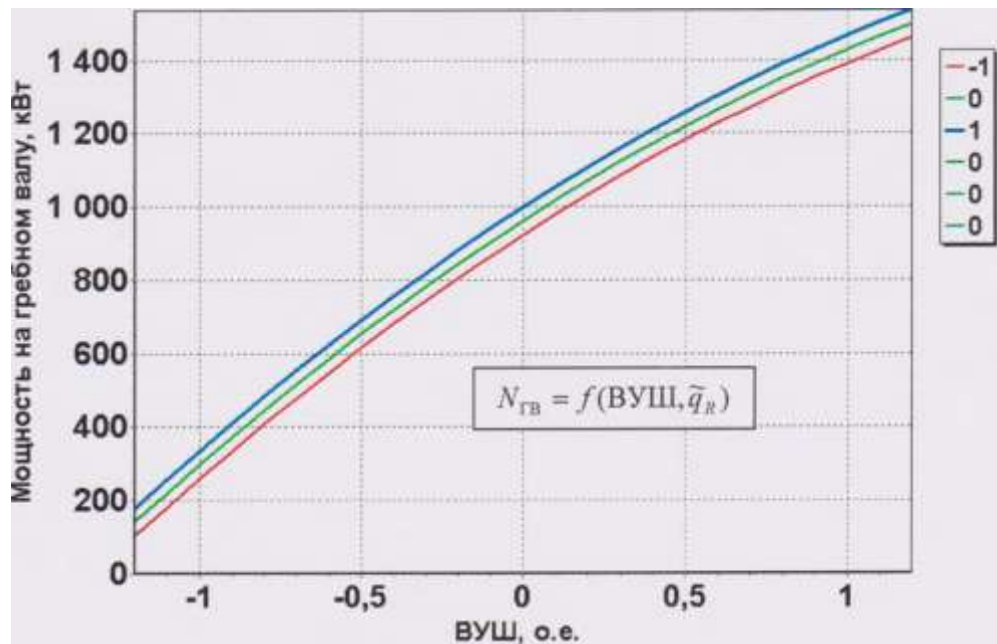


Рис. 4. График зависимости мощности на гребном валу от положения ВУШ на контркурсах

Вывод 2. Для испытаний судов в режиме движения судна на промысел (режим свободного хода) рекомендуется проводить опыты по плану (2×3) – ВУШ следует изменять на трёх уровнях при движении судна на контркурсах (два уровня). Общее количество опытов $N = 6$.

4. ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Используя данные испытаний судна (табл. 10) относительно расхода топлива, произвести обработку результатов замера расхода топлива при изменении значений q_R и ВУШ на трёх уровнях по плану ОЦКП. Доказать возможность проведение испытаний по плану (2×3) путём оценки значимости коэффициентов модели и её адекватности.

Таблица 10

ОЦКП для математического описания зависимости $G = f(\text{ВУШ}, q_R)$

Опыт u	План		Расчёт		
	$\tilde{q}_R$	ВУШ	$\bar{G}$, кг/ч	G^* , кг/ч	$ \bar{G} - G^* $, кг/ч
1	–	–	100		
2	–	+	330		
3	+	–	122		

4	+	+	349		
5	0	–	110		
6	0	+	340		
7	–	0	180		
8	+	0	190		
9	0	0	184		

5. МАТЕРИАЛЫ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Расчёт коэффициентов полинома, выполненный по программе ОЦКП.
2. Статистическая обработка результатов испытаний (оценка значимости коэффициентов и адекватности модели экспериментальным данным).
3. План эксперимента (2×3).
4. Расчёт коэффициентов неполного квадратичного полинома $G = f(\text{ВУШ}, q_R)$.
5. Проверка адекватность неполного квадратичного полинома.
6. График зависимости расхода топлива от положения ВУШ при движении судна на контркурсах.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. На какие группы можно разделить все переменные, определяющие состояние объекта?
2. Какие требования предъявляются к выбору выходного параметра (критерия оптимизации)?
3. Какие требования предъявляются к выбору независимых переменных (факторов)?
4. Что такое совместимость и управляемость факторов?
5. Какие требования предъявляются к совокупности факторов?
6. Назовите планы эксперимента для построения линейных моделей. Какими свойствами они обладают?
7. Что такое рандомизация опытов?
8. Как проверить воспроизводимость опытов? По какому критерию она оценивается?
9. По какому критерию оценивается значимость коэффициентов?
10. Что такое адекватность модели? По какому критерию она проверяется?
11. Какие данные необходимы для полной статистической обработки эксперимента?

12. Назовите основные причины незначимости коэффициентов.
13. Назовите достоинства и недостатки полного факторного эксперимента.
14. Какие планы применяются для построения квадратичных моделей?

7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Солодов, В. С. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2012. – 204 с.
2. Солодов В.С. Идентификация комплекса судно-трал методами планирования активного эксперимента : монография/ В. С. Солодов. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 2008. – 248 с. : ил.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ И НАТУРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ВВЕДЕНИЕ

При обработке данных пассивного или активного эксперимента, одновременного их использования исследователь встречается с необходимостью проведения большого количества вычислений различной сложности для получения и оформления конечных результатов.

Многие из указанных работ приходится выполнять вручную, что приводит к существенному увеличению сроков получения результатов эксперимента и значительно снижает производительность труда исследователей.

Это определяет необходимость автоматизации экспериментальных исследований. Одним из способов, позволяющих строить математические модели сложных систем при минимальных затратах на эксперимент (на обработку экспериментальной информации), основан на использовании ЭВМ.

Цель работы – изучить вопросы автоматизации обработки априорной информации и результатов натурного эксперимента с помощью ЭВМ.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В системе автоматизированного эксперимента (с использованием ЭВМ), несмотря на то, что многие трудоемкие процессы возложены на ЭВМ, исследователь выполняет вручную такие операции, как планирование, организация и проведение эксперимента; введение исходной информации в ЭВМ для обработки результатов эксперимента; контроль правильности выполнения плана эксперимента и внесение изменений в план (уточнение плана эксперимента); контроль достоверности получаемой информации об объекте исследования и уточнение исходной и текущей информации и т. д.

Важной составной частью комплекса средств автоматизации эксперимента является его программное (или математическое) обеспечение. Разработка математического обеспечения (МО) для всего комплекса программ, реализующих методы и алгоритмы планирования эксперимента, составляет 60 -70 % трудоемкости всех работ по созданию и внедрению комплекса средств автоматизации эксперимента. Кафедрой АиВТ МГТУ для обработки эксперимента разработан ряд программ, позволяющих существенно облегчить труд исследователя.

2. ПРОГРАММЫ ЭВМ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

2.1. Программа «Расчет коэффициентов двухфакторной модели»

Исходными данными для расчёта коэффициентов двухфакторной модели являются средние измеренные значения выходной функции Y_{cp} .

Программа ортогонального центрального композиционного плана (ОЦКП) рассчитывает коэффициенты и строит полином по 9 равноотстоящим точкам, рассчитывает невязки модели и выводит на печать.

Для использования ЭВМ при обработке априорной информации, представленной в виде статических характеристик, необходимо составить план эксперимента и в соответствии с этим планом расставить точки опыта и заполнить графу «Результаты».

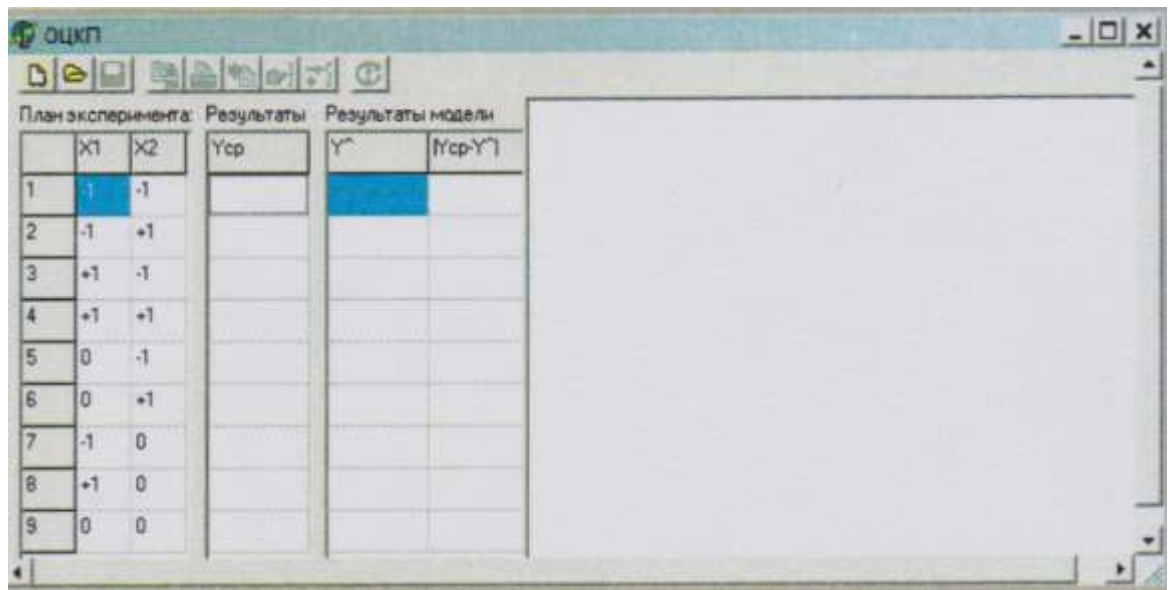


Рис. 1. Внешний вид панели программы расчёта коэффициентов модели по ОЦКП

3.2. Программа «Построение графиков» для двухфакторной модели

Исходными данными для построения графиков двухфакторной модели являются коэффициенты полиномиальной модели.

Программа Main строит графики двухфакторной модели по оси X_1 или X_2 в чёрно-белом или цветном изображении. Уровни X_i следует задавать любые в пределах $(-1; +1)$. Как правило, рекомендуется задать $(-1; -0,5; 0; +0,5; +1)$. В последней клетке задаётся прогнозируемое значение X_1 или X_2 в пределах и за пределами варьирования факторов.

Например $X_1 = 1,4$ программа выдаст дополнительно к 5-и кривым кривую для $X_1 = 1,4$, что будет отражено в легенде, расположенной справа. Можно задавать любые другие значения X_1 (в разумных пределах) как за пределами варьируемых параметров, так и внутри области варьирования X_i .

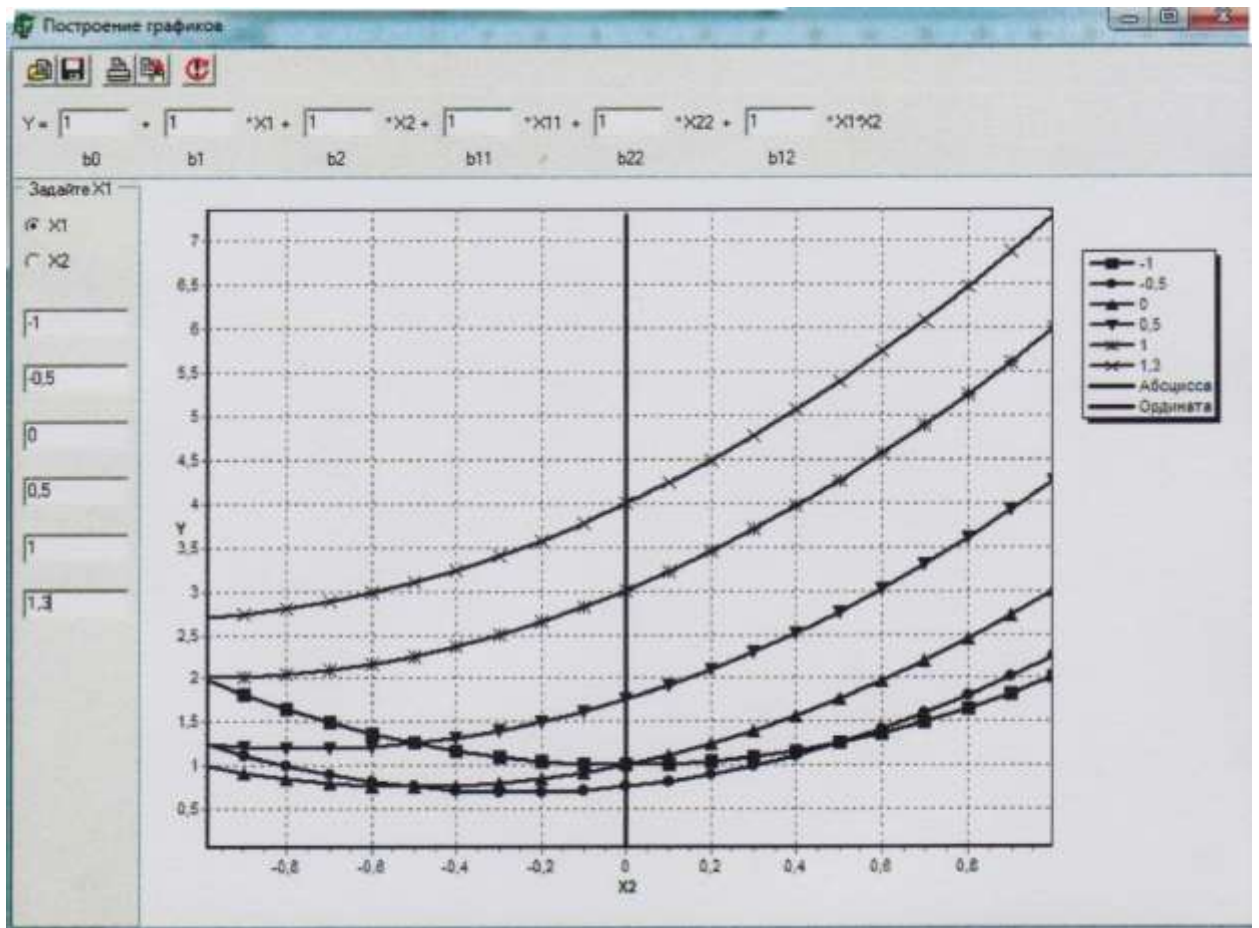


Рис. 2. Внешний вид панели программы построения графиков двухфакторной модели

2.3. Программа расчёта коэффициентов нелинейной трёхфакторной модели

Программа предназначена для расчета коэффициентов и регрессионного анализа трехфакторной полиномиальной модели по методу планирования активного эксперимента, реализованного по плану Бокса-Бенкина. Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

- построение расчетной матрицы;
- расчет коэффициентов трехфакторной модели и проведение регрессионного анализа;
- проверка адекватности модели;
- вычисление невязки между данными эксперимента и результатами, полученными при использовании программы;
- вывод результатов на печать.

Внешний вид панели программы «Построение модели по плану Бокса-Бенкина» представлен на рис. 3.

Рис. 3. Внешний вид панели программы расчёта коэффициентов трёхфакторной модели по плану Бокса-Бенкина

2.4. Программа расчёта значений выходных параметров двухфакторных и трёхфакторных нелинейных моделей

Для двухфакторной и трёхфакторной модели имеется программа расчёта значений выходных функций count 23.

Программа count 23 рассчитывает значения двухфакторного или трёхфакторного полинома при заданных коэффициентах b_i и значениях аргумента X_1 и X_2 ; X_1 , X_2 и X_3 . Внешний вид программы «Расчёт значений полинома» представлен на рис. 4.

Рис. 4. Расчёт значений полинома

3. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭВМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Примеры построения двухфакторной полиномиальной модели по статической характеристике

На рис. 1 представлена механическая характеристика привода ваерной лебёдки в режиме «Выбирать». Требуется построить полиномиальную модель, описывающую зависимость частоту вращения электропривода ваерной лебёдки от положения поста управления лебёдкой ПУ и момента сопротивления M .

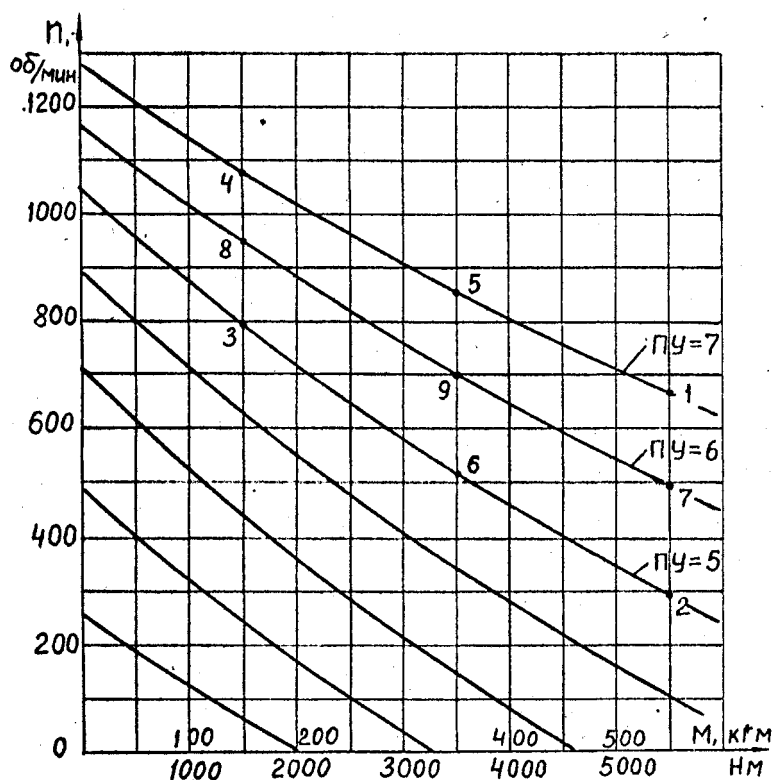


Рис. 1. Механическая характеристика электропривода ваерной лебёдки WTJ12,5W290

Решение. Используя ОЦКП второго порядка, получим математическое описание наиболее существенной её части – области номинальных значений частоты вращения. Ограничим исследуемую область следующими значениями варьируемых параметров

$$ПУ^{\min} = 5; ПУ^{\max} = 7; ПУ^0 = 6; \Delta ПУ = 1.$$

$$M^{\min} = 1\,500 \text{ Н·м}; M^{\max} = 5\,500 \text{ Н·м}; M^0 = 3\,500 \text{ Н·м}; \Delta M = 2\,000 \text{ Н·м}.$$

$$\widetilde{П\ddot{У}} = П\ddot{У} - 6; \quad \widetilde{М} = \frac{М - 3\,500}{2\,000}.$$

$$n^* = b_0 + b_1\widetilde{П\ddot{У}} + b_2\widetilde{М} + b_{12}\widetilde{П\ddot{У}} \cdot \widetilde{М} + b_{11}\widetilde{П\ddot{У}}^2 + b_{22}\widetilde{М}^2, \text{ об/мин},$$

где $\widetilde{П\ddot{У}}$ – положение рукоятки управления командоконтроллером в кодированных переменных; $\widetilde{М}$ – значение момента на валу в кодированных переменных.

Составим план эксперимента и расчётную матрицу, в которой отметим значения частоты в точках плана (результаты опыта).

План эксперимента и результаты определения частоты вращения $\hat{n} = f(\widetilde{П\ddot{У}}, \widetilde{М})$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

План эксперимента и расчётная матрица $\hat{n} = f(\widetilde{П\ddot{У}}, \widetilde{М})$

Номер опыта u	План эксперимента		Результат опыта n , об/мин	Расчёт $\hat{n}$, об/мин	Невязка абсолютная $ n - \hat{n} $, об/мин	Невязка относи- тельная $ n - \hat{n} $, %
	$\widetilde{П\ddot{У}}$	$\widetilde{М}$				
1	+	+	660	664,7	4,7	0,7
2	–	+	290	289,7	0,3	0,1
3	–	–	790	784,7	5,28	0,7
4	+	–	1 070	1 069,7	0,28	0
5	+	0	850	845,6	4,4	0,6
6	–	0	510	515,6	5,6	0,9
7	0	+	500	495,6	4,4	0,6
8	0	–	940	945,6	5,6	0,9
9	0	0	700	698,9	1,1	0,1

Введём результаты опытов в программу в соответствии с уровнями факторов. Исходные данные, расчёт коэффициентов модели и невязка приведены ниже.

Исходные данные расчёта: "№: [x_1 , x_2] = $Y_{ср}$ "

1: [-1 , -1] = 790
 2: [-1 , +1] = 290
 3: [+1 , -1] = 1070
 4: [+1 , +1] = 660
 5: [0 , -1] = 940
 6: [0 , +1] = 500
 7: [-1 , 0] = 510
 8: [+1 , 0] = 850
 9: [0 , 0] = 700

Вычисление коэффициентов:

$b_0' = 701,1111$
 $b_{11} = -18,3333$
 $b_{22} = 21,6667$
 $b_0 = 698,8889$
 $b_1 = 165$
 $b_2 = -225$
 $b_{12} = 22,5$

Итоговый полином:

$$\hat{Y} = 698,8889 + 165 \cdot x_1 - 225 \cdot x_2 - 18,3333 \cdot x_1^2 + 21,6667 \cdot x_2^2 + 22,5 \cdot x_1 \cdot x_2$$

Результаты модели: "№: [x_1 , x_2] = | $Y_{ср} - \hat{Y}$ | = невязка"

- 1: [-1 , -1] = | 790 - 784,7222 | = 5,2778
- 2: [-1 , +1] = | 290 - 289,7222 | = 0,2778
- 3: [+1 , -1] = | 1070 - 1069,7222 | = 0,2778
- 4: [+1 , +1] = | 660 - 664,7222 | = 4,7222
- 5: [0 , -1] = | 940 - 945,5556 | = 5,5556
- 6: [0 , +1] = | 500 - 495,5556 | = 4,4444
- 7: [-1 , 0] = | 510 - 515,5556 | = 5,5556
- 8: [+1 , 0] = | 850 - 845,5556 | = 4,4444
- 9: [0 , 0] = | 700 - 698,8889 | = 1,1111

Используя программу ЭВМ, с учётом принятых обозначений получим полином для электропривода ваерной лебёдки WTJ 12,5 W290

$$\hat{n} = 699 + 165\tilde{P}\tilde{Y} - 225\tilde{M} + 22,5\tilde{P}\tilde{Y} \cdot \tilde{M} - 18,3\tilde{P}\tilde{Y}^2 + 21,7\tilde{M}^2, \text{ об/мин.}$$

3.2. Примеры построения графиков двухфакторной модели

Построим механическую характеристику электропривода ваерной лебёдки WTJ12,5W290 по полиномиальной модели

$$\hat{n} = 699 + 165\tilde{P}\hat{Y} - 225\tilde{M} + 22,5\tilde{P}\hat{Y} \cdot \tilde{M} - 18,3\tilde{P}\hat{Y}^2 + 21,7\tilde{M}^2, \text{ об/мин.}$$

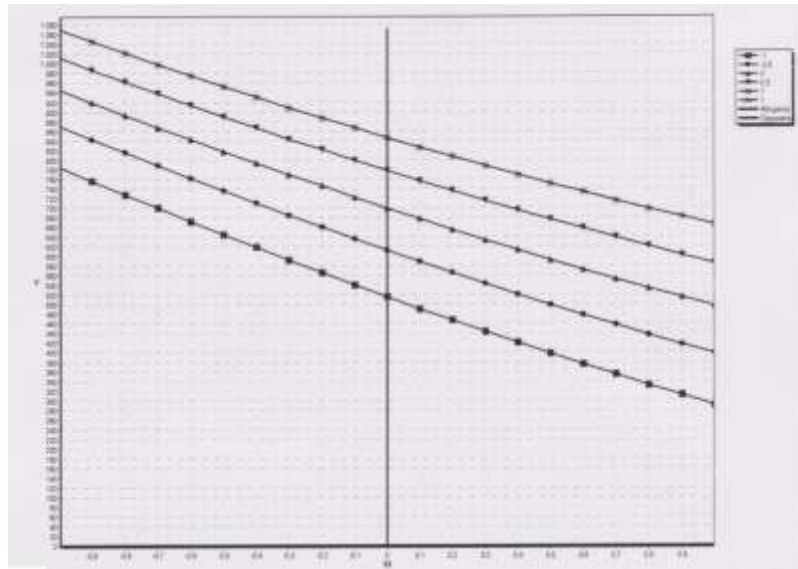


Рис. 2. Механическая характеристика электропривода ваерной лебёдки

3.3. Пример построения нелинейного полинома по трём параметрам

Тягово-скоростные свойства ваерной лебёдки WTJ12,5W290 в режиме вы- бирания ваеров описываются следующими математическими выражениями:

$$\hat{D} = 1,05 + 0,44\tilde{L}_6 - 0,09\tilde{L}_6^2, \text{ м;}$$

$$\tilde{L}_6 = \frac{L_6 - 2\,000}{2\,000}; \quad M = 2,93 \cdot 10^2 \cdot T \cdot D, \text{ Н·м;} \quad T = 3,41 \frac{M}{D}, \text{ Н;}$$

$$\hat{n} = 11,7 + 2,75\tilde{\Pi\tilde{Y}} - 3,75\tilde{M} + 0,38\tilde{\Pi\tilde{Y}} \cdot \tilde{M} - 0,3\tilde{\Pi\tilde{Y}}^2 + 0,36\tilde{M}^2, \text{ об/с};$$

$$\tilde{M} = \frac{M - 3\,500}{2\,000}; \quad \tilde{\Pi\tilde{Y}} = \Pi Y - 6; \quad V_{\text{л}} = 0,157n \cdot \hat{D}, \text{ м/с}.$$

По приведённым выше формулам для ВЛ рассчитаны значения линейной скорости (табл. 2) по плану Бокса – Бенкина.

Таблица 2

Исходные данные для расчёта полиномиальной зависимости

$$V_{\text{л}}^* = f(\tilde{L}_6, \tilde{T}, \tilde{\Pi\tilde{Y}})$$

Номер опыта	План эксперимента			Резуль- тат вычис- лений
	$\tilde{L}_6$	$\tilde{T}$	$\tilde{\Pi\tilde{Y}}$	$V_{\text{л}}^*$
1	—	—	0	1,425
2	+	—	0	3,201
3	—	+	0	1,084
4	+	+	0	1,318
5	—	0	—	0,991
6	+	0	—	1,210
7	—	0	+	1,390
8	+	0	+	2,552
9	0	—	—	2,145
10	0	+	—	0,834
11	0	—	+	2,927
12	0	+	+	1,856
13	0	0	0	1,818


```

Расчет вспомогательных величин:
p1 = -0,5*(0Y) = -11,3665
p2 = 0,1875*[(11Y)+(22Y)+(33Y)] = 7,8499
p3 = p1+p2 = -3,5166

Расчет коэффициентов полинома:
b0 = [Y13'+Y13''+Y13''']/3 = 1,8
b1 = 0,125*(1Y) = 0,4239
b2 = 0,125*(2Y) = -0,5757
b3 = 0,125*(3Y) = 0,4431
b11 = 0,25*(11Y)+p3 = -0,2239
b22 = 0,25*(22Y)+p3 = 0,1809
b33 = 0,25*(33Y)+p3 = -0,0404
b12 = 0,25*(12Y) = -0,3855
b13 = 0,25*(13Y) = 0,2358
b23 = 0,25*(23Y) = 0,06

Полином:
Y = 1,8 + 0,4239*X1 - 0,5757*X2 + 0,4431*X3 - 0,2239*X1^2 + 0,1809*X2^2 - 0,0404*X3^2 - 0,3855*X1*X2 + 0,2358*X1*X3 + 0,06*X2*X3

Регрессионный анализ модели

Расчет ошибки воспроизводимости эксперимента:
Se{Y} = sqrt([(Y13'-b0)^2+(Y13''-b0)^2+(Y13'''-b0)^2]/2) = 0,0819

Анализ значимости коэффициентов регрессии:
b0c = 4.3*1*Se{Y} = 0,352
b1c = 4.3*0.354*Se{Y} = 0,1246
b11c = 4.3*0.66*Se{Y} = 0,2323
b1jc = 4.3*0.5*Se{Y} = 0,176

b0: |1,8| >= 0,352 - оставляем
b1: |0,4239| >= 0,1246 - оставляем
b2: |-0,5757| >= 0,1246 - оставляем
b3: |0,4431| >= 0,1246 - оставляем
b11: |-0,2239| < 0,2323 - рекомендую оставить, так как |b11|>=Se{Y}: |-0,2239| >= 0,0819
b22: |0,1809| < 0,2323 - рекомендую оставить, так как |b22|>=Se{Y}: |0,1809| >= 0,0819
b33: |-0,0404| < 0,2323
b12: |-0,3855| >= 0,176 - оставляем
b13: |0,2358| >= 0,176 - оставляем
b23: |0,06| < 0,176

Итоговый полином:
Y = 1,8 + 0,4239*X1 - 0,5757*X2 + 0,4431*X3 - 0,2239*X1^2 + 0,1809*X2^2 - 0,0404*X3^2 - 0,3855*X1*X2 + 0,2358*X1*X3 + 0,06*X2*X3

Проверка адекватности модели

Сумма произведений значимых коэффициентов на суммы столбцов:
SSмод = b0*(0Y) + b1*(1Y) + b2*(2Y) + b3*(3Y) + b11*(11Y) + b22*(22Y) + b33*(33Y) + b12*(12Y) + b13*(13Y) + b23*(23Y) = 46,5758

Сумма квадратов экспериментальных значений выходного параметра:
(YY) = 46,6288

Остаточная сумма квадратов:
SSост = (YY) - SSмод = 0,0531

Дисперсия неадекватности:
fна = 13 - L = 3
S^2на = [SS - 2*Se^2{Y}]/fна = 0,0132

Критерий Фишера:
F = S^2на/Se^2{Y} = 1,9737

МОДЕЛЬ АДЕКВАТНА!!! так как F<Fтабл : 1,9737 <= 19,16

```

Для изучения технологического процесса, зависящего от трёх факторов возможно построение $Y = f(X_1, X_2)$ при различных значениях X_3 . Например, можно построить графики $V_n = f(L_6, T)$ для каждого положения ПУ. Для этого подставим соответствующие значения ПУ в полином $V_n = f(L_6, T, \text{ПУ})$.

В качестве примера на рис. 3 представлен графики зависимости

$V_n = f(L_6, T)$ при ПУ = 5, что соответствует $\tilde{\text{ПУ}} = -1$.

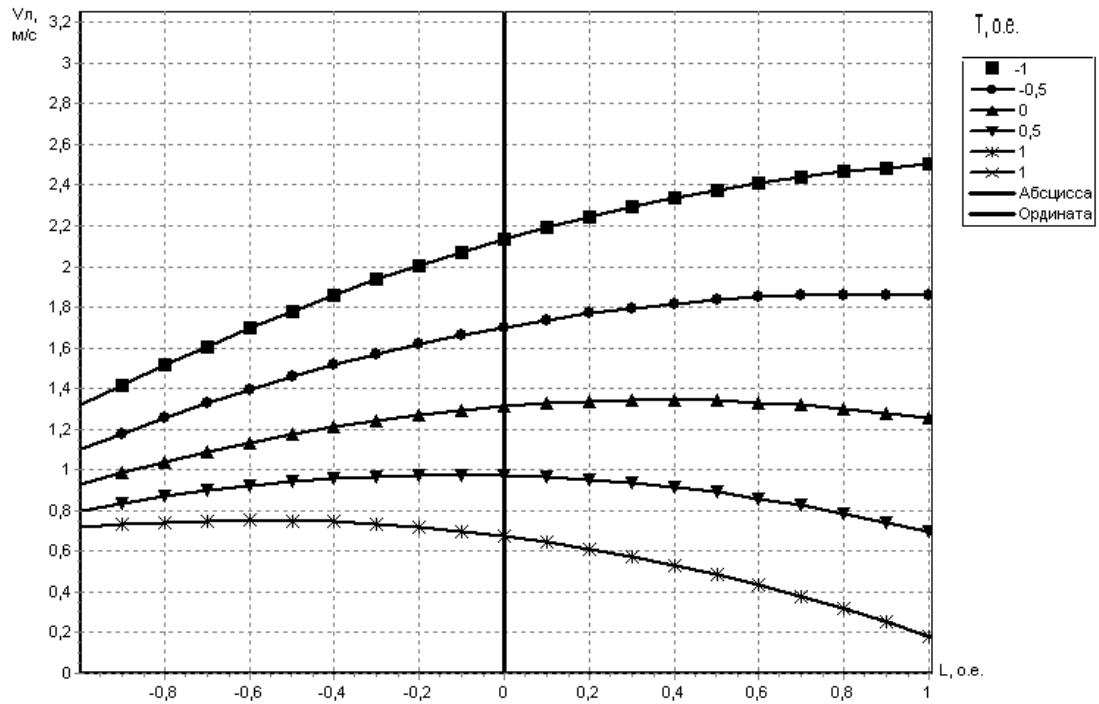


Рис. 3. Зависимость линейной скорости выбирания ваеров $V_{л}$ от длины ваеров на барабане при $\tilde{П\ddot{У}} = -1$

3.4. Примеры расчёта выходных параметров полинома

Технологический процесс описывается полиномом

$$Y^* = 699 + 165x_1 - 225x_2 - 18,3x_1x_1 + 21,7x_2x_2 + 22,5x_1x_2.$$

Требуется рассчитать значение Y^* при $x_1 = +1$; $x_2 = +1$.

После занесения в программу значений коэффициентов полинома b_i и заданных значений входных параметров $X1$ и $X2$ программа рассчитывает значение $Y = 664,9$ (рис. 4).

Аналогичным образом рассчитываются значения трёхфакторного полинома. Для этого в окне «Факторы» (рис.4) необходимо выбрать цифру 3.

Расчет значений полинома

$Y = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_{11} \cdot X_1 \cdot X_1 + b_{22} \cdot X_2 \cdot X_2 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2$

Факторы: ☒ 2 ☐ 3

b0: 699 b1: 165 b2: -225 b11: -18,3 b22: 21,7 b12: 22,5 b13: b23:

X1: 1 X2: 1 X3:

count23

Y = 664,9

OK

Рис. 4. Пример расчёта значения выходного параметра Y двухфакторной модели при $X_1 = 1$, $X_2 = 1$.

4. ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Задание 1. Проводились опыты по плану ОЦКП, представленному в табл.

3. Используя данные табл. 4 и программу ЭВМ:

1. Рассчитать коэффициенты модели и построить графики $Y = f(X_1, X_2)$ по оси абсцисс X_2 при различных значениях $X_1 = \text{const}$.
2. Провести статистическую обработку полиномиальной модели.

Таблица 3

План ОЦКП

Номер опыта u	План эксперимента		Результат измерения Y_u	Результат вычисления Y_u^*	Невязка аб- солютная $ Y_u - Y_u^* $
	X_1	X_2			
1	—	—	Y_1		
2	—	+	Y_2		
3	+	—	Y_3		
4	+	+	Y_4	664,9	
5	0	—	Y_5		
6	0	+	Y_6		
7	—	0	Y_7		
8	+	0	Y_8		
9	0	0	Y_9		

Варианты задания 1

Таблица 4

Результаты опытов, проведённых по плану ОЦКП

Вариант	Результаты измерений параметра по ОЦКП								
	У1	У2	У3	У4	У5	У6	У7	У8	У9
1	80	20	95	50	90	35	50	70	60
2	75	25	90	50	85	40	55	70	60
3	75	35	90	55	80	50	60	75	65
4	70	25	85	45	80	40	50	70	55
5	80	20	95	50	90	40	50	70	60
6	70	20	85	45	80	30	45	65	55
7	70	30	85	50	75	45	55	70	60

Задание 2. По экспериментальным данным табл. 5 рассчитать коэффициенты полинома и построить полиномиальную модель по трём факторам с использованием ЭВМ.

Задавая различные значения в 13 – 15 опытах, оценить влияние разброса параметров в центре плана на значимость коэффициентов трёхфакторной модели и её адекватность.

Вариант задания 2

Таблица 5

Результаты эксперимента по плану Бокса – Бенкина

Номер опыта	План			Результаты опыта						
	X1	X2	X3	У1	У2	У3	У4	У5	У6	У7
1	—	—	0	20,5	2,15	64	16	21,4	6,4	160
2	+	—	0	28,0	2,90	191	9	29,0	19,1	90
3	—	+	0	23,0	2,00	76	79	20,0	7,6	790
4	+	+	0	31,0	2,60	205	57	26,0	20,5	570
5	—	0	—	21,6	2,10	68	43	21,0	6,8	430
6	+	0	—	30,5	2,85	201	31	28,4	20,1	310
7	—	0	+	22,5	2,00	750	46	20,0	75,0	460
8	+	0	+	32,0	2,70	208	34	27,0	20,8	340
9	0	—	—	24,0	2,60	120	16	26,0	12,0	160
10	0	+	—	28,5	2,40	124	68	24,0	12,4	680
11	0	—	+	25,0	2,50	122	13	25,0	12,2	130

12	0	+	+	27,0	2,30	131	72	23,0	13,1	720
13	0	0	0	26,0	2,35	125	39	23,5	12,5	390
14	0	0	0	26,5	2,50	120	40	25,0	12,0	400
15	0	0	0	25,5	2,45	130	41	24,4	13,0	410

5. МАТЕРИАЛЫ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Расчёт коэффициентов двухфакторной модели для одного из выходных параметров (по заданию преподавателя) на ЭВМ.
2. Графики зависимости $Y = f(X_1, X_2)$ согласно варианту по табл. 4.
3. Расчёт коэффициентов трёхфакторной модели, рассчитанной на ЭВМ, по экспериментальным данным табл. 5. Полиномиальная модель строится без статистически незначимых коэффициентов. При этом модель должна быть адекватна результатам эксперимента.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём состоит идея Н. Винера? Как представляется им объект испытаний?
2. Как представляется аналитическое выражение функции отклика в теории планирования эксперимента?
3. В чём заключается идея шагового поиска? Почему эта идея не реализована при проведении комплексных испытаний?
4. Что такое активный эксперимент и каковы его цели?
5. Каковы особенности использования методов планирования эксперимента для обработки комплексных испытаний объекта?
6. Каковы особенности использования методов планирования эксперимента для обработки комплексных испытаний «судно-трал»?
7. Какие требования предъявляются к варьируемым параметрам?
8. Назовите основные требования, предъявляемые к факторам и их совокупности.
9. Каким образом достигается совместимость факторов?
10. Какие требования предъявляются выходным параметрам?
11. Что такое воспроизводимость опыта, и по какому критерию она оценивается?
12. По какому критерию проверяется значимость коэффициентов?
13. Что такое адекватность модели, и по какому критерию она проверяется?
14. Какие критерии возможны при выборе планов эксперимента?
15. Каковы достоинства плана Бокса-Бенкина для проведения комплексных испытаний объектов?

7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Солодов, В. С. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2012. – 204 с.
2. Солодов, В. С. Идентификация комплекса судно-трал методами планирования активного эксперимента : монография/ В. С.Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2008. – 248 с. : ил.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОМПЛЕКСА СУДНО-ТРАЛ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАТУРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ВВЕДЕНИЕ

Из множества задач, решаемых исследователями при управлении различными объектами, являются задачи повышения эффективности работы энергетических установок, улучшения их экономических показателей, повышения надёжности работы и увеличения срока службы, снижения аварийности, более полного и рационального использования мощности в различных режимах работы.

Цель работы – дать в практику работы исследователя современные методы планирования и обработки экспериментов при комплексных испытаниях объекта, направленных на построение математических моделей технологических процессов.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Модель объекта при проведении натурного эксперимента

В технологическом процессе вылова рыбы судоводителю необходимо учитывать тягово-скоростные характеристики судна (мощность главного двигателя, расход топлива, скорость и избыточную тягу судна), а также характеристики трала (глубину хода трала, горизонтальное и вертикальное раскрытие, сопротивление трала в воде при различных длинах ваеров и скорости судна). Буксируемый судном трал отстаёт от судна на большие расстояния (несколько сот метров), а при глубоководном пелагическом лове 1000 и более метров. При этом на весь этот комплекс «судно-трал» влияют внешние факторы (ветер и течение). Чтобы вести прицельный лов рыбы судоводитель должен знать характе-

ристики комплекса и быстро реагировать на изменение промысловой обстановки.

Наиболее достоверная информация о характеристиках объекта может быть получена путем проведения его натурных испытаний.

Натурные испытания технологических объектов связаны со значительными затратами времени, материальных и людских ресурсов. Поэтому возникает необходимость в организации испытаний как планируемого научного эксперимента, повышении эффективности и качества испытаний, в улучшении формы представления информации.

Так как степень полинома, описывающего процессы в реальном объекте заранее предсказать нельзя, то пользуются *идеей шагового поиска*, т.е. сначала пытаются описать исследуемое явление самой простой – линейной моделью. Если линейная модель окажется неудовлетворительной, то увеличивают число членов полинома, т. е. повышают его степень. Процесс продолжают до тех пор, пока не будет получена модель, адекватно описывающая результаты эксперимента.

В ряде случаев, когда процесс нелинейно зависит от одного параметра а по другому параметру он связан линейно, удаётся использовать более экономичные планы $M1 \times M2$ (3×2).

1.2. Особенности комплекса "судно-трал" как объекта испытаний

Особенностью рассматриваемого судового комплекса как объекта испытаний является наличие большого количества взаимосвязанных плохо управляемых параметров, таких как скорость судна, глубина хода трала, тяговое усилие в ваерах, раскрытие трала, расход топлива, и малого количества параметров, отвечающих требованиям, предъявляемым к факторам и их совокупности при проведении активного эксперимента. Например, отсутствие априорной информации о количественной связи между скоростью судна и управляющим воздействием (выносным указателем шага винта) практически не позволяет в процессе испытаний достаточно точно установить скорость судна, предписанную планом эксперимента, и удерживать ее на требуемом уровне при изменении других варьируемых параметров (например, длины вытравленных ваеров). Обеспечение заданной скорости путем воздействия на ВРШ методом проб требует большого времени вследствие инерционности судна и трала.

Анализ характеристик трала показывает, что сравнительно небольшие отклонения установленной скорости судна от ее величины, предписанной планом эксперимента, приводят к существенным изменениям сопротивления воды движению трала и мощности, потребляемой гребным винтом. Это вызывает слож-

ность в обеспечении воспроизводимости опыта и большую ошибку при построении характеристик комплекса.

Вторая особенность вытекает из цели испытаний. Необходимо найти количественную связь между основными рабочими параметрами комплекса. Требуется не только исследовать влияние варьируемых в процессе испытаний параметров на тот или иной выходной параметр (прямая задача в планировании эксперимента), но и найти количественную связь между параметрами, которые при проведении испытаний рассматривались как выходные, т.е. найти *взаимосвязь между отдельными выходными параметрами*. Процесс испытания и управления комплексом образуют дуальный процесс, в котором управляющие воздействия одновременно служат для изучения управляемого объекта и для приведения его к требуемому состоянию. Эти особенности должны учитываться при выборе варьируемых и выходных параметров, плана эксперимента и формы представления результатов испытаний, они требуют разработки специальных методов преобразования полиномиальных моделей.

2. ВЫБОР ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОМПЛЕКСА

Модель комплекса «Судно-трал» в режиме траления можно представить рис. 1.

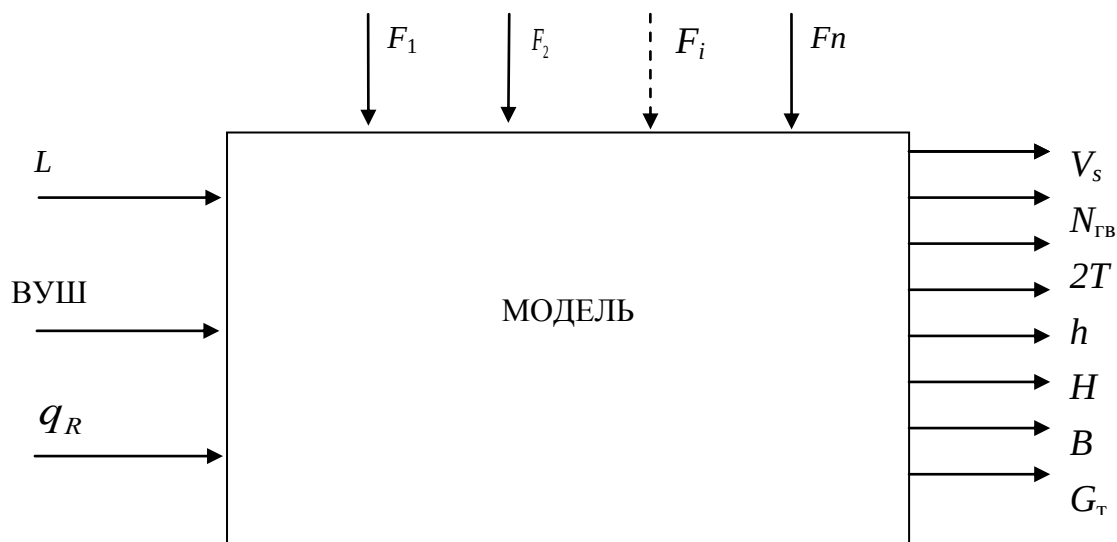


Рис. 1. Структурная модель судна в режиме траления

При использовании МПАЭ для построения математических моделей комплекса учтены следующие требования к варьируемым (входным) параметрам: управляемость входных параметров, измеряемость и высокая точность замера факторов. Поэтому в качестве варьируемых факторов были приняты:

- положение рукоятки управления шагом винта, контролируемое выносным указателем шага (ВУШ);
- длина вытравленных ваеров L_v , контролируемая датчиком длины

ваеров;

– курсовой угол ветра q_R , контролируемый датчиком курса.

Учитывая одновременное изменение нескольких параметров (факторов), при использовании МПАЭ учтены требования, предъявляемые к совокупности факторов.

Прежде всего, это требование совместимости, которое означает, что все комбинации факторов, предусмотренные планом эксперимента, осуществимы и безопасны. Факторы должны быть некоррелированы, т. е. должна иметься возможность изменять значения каждого из рассматриваемых в системе факторов независимо друг от друга. Шаг винта, длина вытравленных ваеров и курсовой угол ветра устанавливаются независимо друг от друга, т. е. являются некоррелированными.

Совместимость факторов обеспечивалась тем, что первым проводился опыт, соответствующий максимальной глубине трала и минимальному значению ВУШ. Второй опыт проводится с учётом ограничения по мощности. При таких условиях все остальные опыты реализуемы – отсутствует опасность посадить трал на грунт, получить завёрт трала при минимальной скорости, перегрузить главный двигатель.

Основными выходными параметрами, характеризующими процесс наведения трала на скопление рыбы и определяющими энергетические возможности судна вести траление на больших скоростях и глубинах, являются:

- глубина хода трала h , м;
- скорость судна (скорость буксировки трала) V_S , м/с;
- тяговое усилие в ваерах (суммарное) $2T$, Н;
- мощность, потребляемая гребным винтом, $N_{г.в.}$, кВт.

3. ВЫБОР ПЛАНА И ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учитывая особенности объекта исследования, выбираем план Бокса – Бенкина (ВВЗ). Ввиду того, что план Бокса – Бенкина почти ротатабельный, для статистической оценки проводятся три опыта в центре плана. Матрица плана в каждом опыте имеет отличные от нуля только два фактора, что весьма удобно для его реализации. План Бокса – Бенкина является целочисленным. Таким образом, по плану требуется провести 15 опытов.

Для регрессионного анализа модели в центре плана проводятся повторные опыты. Рекомендуются при количестве факторов $k = 3$ проводить три повторных опыта. Общее число опытов составляет $N_{общ} = N + n_0 = 12 + 3 = 15$.

Коэффициенты квадратичного полинома и ошибки их определения рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} b_0 &= y_{0u}; \quad S\{b_0\} = T_6 S_y; \\ b_i &= T_2(iY); \quad S\{b_i\} = T_7 S_y; \\ b_{ii} &= T_3(iiY) + T_4 \sum (iiY) - T_1(0Y); \quad S\{b_{ii}\} = T_8 S_y; \\ b_{ij} &= T_5(ijY); \quad S\{b_{ij}\} = T_9 S_y. \end{aligned} \quad (1)$$

В формулах (1) обозначены:

$(0Y)$ – сумма измеренных значений выходного параметра по всем 13 опытам;

(iY) – сумма произведений выходного параметра на соответствующий столбец плана эксперимента;

(iiY) – сумма произведений выходного параметра на квадраты столбцов плана эксперимента;

(ijY) – сумма произведений, характеризующих эффект взаимодействия параметров.

Расчет коэффициентов модели удобнее проводить с помощью бланка – алгоритма, т. е. табличным методом или с помощью ЭВМ.

Пример составления бланка-алгоритма для расчета коэффициентов трехфакторного квадратичного полинома приведен табл. 3.

Таблица включает план эксперимента Бокса – Бенкина (первые три столбца), результаты опытов и расчетную матрицу. Расчетную матрицу получают путем перемножения графы «Результаты опытов» Y_i на графы плана эксперимента, их квадраты $\tilde{X}_1^2, \tilde{X}_2^2$ и $\tilde{X}_3^2$ и произведения $\tilde{X}_1 \cdot \tilde{X}_2, \tilde{X}_1 \cdot \tilde{X}_3, \tilde{X}_2 \cdot \tilde{X}_3$.

Согласно бланку-алгоритму сначала находят суммы граф $(0Y), (1Y) \dots, (23Y)$, вспомогательные промежуточные коэффициенты ρ_1 , для расчета b_{ii} . Коэффициенты T_i , находят по табл. 1.

Таблица 1

Расчётные коэффициенты $T_i \times 10^5$ для плана Бокса – Бенкина при $k = 3$

T_1	50 000	T_5	25 000
T_2	12 500	T_6	100 000
T_3	50 000	T_7	35 355
T_4	18 750	T_8	66 150
		T_9	50 000

Затем определяют коэффициенты полинома (линейные эффекты b_i , квадратичные эффекты b_{ii} и эффекты взаимодействия b_{ij} по окончательным формулам путем подстановки соответствующих сумм граф). Коэффициент b_0 определяют по результатам опытов в центре плана.

После определения коэффициентов математической модели проводится ее регрессионный анализ, в ходе которого оценивается среднеквадратичная ошибка воспроизводимости эксперимента, ошибки в определении коэффициентов регрессии. Проводится анализ значимости коэффициентов регрессии, проверяется гипотеза об адекватности полиномиальной модели со всеми значимыми коэффициентами регрессии.

4. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КОМПЛЕКСА «СУДНО-ТРАЛ»

Пусть требуется построить полиномиальную модель – зависимость тягового усилия в ваерах от положения разворота лопастей винта регулируемого

шага (ВУШ), длины ваеров L_v и курсового угла ветра q_R по данным испытаний комплекса «судно-трал». Результаты испытаний приведены в табл. 3.

Для определения верхних и нижних уровней факторов в натуральных единицах измерения и обеспечения реализуемости плана перед его реализацией были проведены пробные траления при минимальной скорости буксировки трала из условия устойчивого его движения в воде и максимальной скорости буксировки с учётом ограничения по мощности.

Максимальная длина ваеров выбрана с учетом глубины моря.

В результате приняты следующие диапазоны варьирования факторов:

$ВУШ_{\max} = 17_{\text{дел}}; ВУШ_{\min} = 11_{\text{дел}}; ВУШ_{\text{ср}} = 14_{\text{дел}};$

$L_{\max} = 1\,800 \text{ м}; L_{\min} = 300 \text{ м}; L_{\text{ср}} = 1\,050 \text{ м};$

$\Delta ВУШ = 3 \text{ дел}; \Delta L = 750 \text{ м}.$

Перейдя к кодированным переменным, получим

$\tilde{ВУШ} = (ВУШ - 14)/3; \tilde{L} = (L - 1\,050)/750.$

Значения параметров в кодированных и натуральных величинах представлены в табл. 2, результаты опытов – в табл.3.

Таблица 2

Значения параметров в кодированных и натуральных величинах

Фактор	Уровень фактора		
	+1	0	-1
ВУШ, дел	17	14	11
L , м	1 800	1 050	300
$\tilde{q}_R$	Движение судна против ветра	Движение судна лагом	Движение судна по ветру

Коэффициенты трёхфакторной модели можно рассчитать с помощью ЭВМ или по бланку-алгоритму, представленному в таблице 3.

Таблица 3

Бланк – алгоритм расчёта коэффициентов полиномиальной модели

$$2T = f(ВУШ, L, q_R)$$

Номер опыта u	План эксперимента			Результат опыта $2T$, кН	Расчётная матрица		
	ВУШ, дел.	L , м	q_R , курс		$\tilde{ВУШ} \cdot 2T$	$\tilde{L} 2T$	$\tilde{q}_R 2T$
1	17	1800	Движение судна лагом	310	310	310	0
2	17	1050	по ветру	305	305	0	-305
3	17	1050	против ветра	320	320	0	320
4	17	300	лагом	280	280	280	0
5	14	300	против ветра	250	0	250	250
6	14	300	по ветру	240	0	240	-240
7*	14	1050	лагом	260	0	0	0
8	14	1800	против ветра	270	0	270	270
9	14	1800	по ветру	285	0	285	-285

10	11	1800	лагом	230	-230	230	0
11	11	1050	против ветра	225	-225	0	225
12	11	1050	по ветру	216	-216	0	-216
13	11	300	лагом	205	-205	-205	0
$\rho_1 = -0,5(OY) = -1700$ * Опыт № 7 повторен три раза $b_0 = 2\bar{T}_7 = \frac{265 + 251 + 263}{3} = 260.$				(0Y) 3396	(1Y) 339	(2Y) 120	(3Y) 19,0
				$B_i = 0,125(iY)$			
				b_1	b_2	b_3	
				42,4	15	2,38	

Окончание табл. 3 (правая часть)

Номер опыта и	Расчетная матрица							
	$\widetilde{B\ddot{Y}Ш}^2 \times 2T$	$\widetilde{L}^2 \cdot 2T$	$\widetilde{q}_R^2 \cdot 2T$	$\widetilde{B\ddot{Y}Ш} \times \widetilde{L} \cdot 2T$	$\widetilde{B\ddot{Y}Ш} \times \widetilde{q}_R \cdot 2T$	$\widetilde{L} \cdot \widetilde{q}_R \times 2T$	$\hat{T},$ кН	$ \hat{T} - T ,$ кН
1	310	310	0	310	0	0	314,9	4,9
2	305	0	305	0	−305	0	305,0	0
3	320	0	320	0	320	0	312,8	7,2
4	280	280	0	−280	0	0	282,4	2,4
5	0	250	250	0	0	−250	254,9	4,9
6	0	240	240	0	0	240	237,6	2,4
7	0	0	0	0	0	0	260,0	0
8	0	270	270	0	0	270	272,4	2,4
9	0	285	285	0	0	−285	280,1	4,9
10	230	230	0	−230	0	0	227,6	2,4
11	225	0	225	0	−225	0	225,0	0,4
12	216	0	216	0	216	0	223,2	7,2
13	205	205	0	205	0	0	200,1	4,9
	(11Y) 2 091	(22Y) 2 070	(33Y) 2 111	(12Y) 5,0	(13Y) 6,0	(23Y) −25,0		
	$\sum(iiY) = 6\ 272$			$b_{ij} = 0,25(iiY)$				
	$\rho_2 = 0,1875 \sum(iiY) = 1176$			b_{12}	b_{13}	b_{23}		
	$b_{ii} = 0,25(iiY) + \rho_1 + \rho_2$			1,25	1,5	−6,25		
	$b_{11} = -1,25$	$b_{22} = -6,5$	$b_{33} = 3,75$					

Опыты проводились при одинаковых погодных условиях: волнении моря 2 балла, скорости ветра 10 м/с. Сравнительно небольшое количество опытов позволило отбор мощности на судовые нужды поддерживать постоянным. Опыт в центре плана проведен трижды для регрессионного анализа.

Полное уравнение регрессии второго порядка имеет вид

$$Y^* = b_0 + b_1 \tilde{V\ddot{U}Ш} + b_2 \tilde{L} + b_3 \tilde{q}_R + b_{11} \tilde{V\ddot{U}Ш}^2 + b_{22} \tilde{L}^2 + b_{33} \tilde{q}_R^2 + b_{12} \tilde{V\ddot{U}Ш} \tilde{L} + b_{13} \tilde{V\ddot{U}Ш} \tilde{q}_R + b_{23} \tilde{L} \tilde{q}_R.$$

Подставив коэффициенты и отбросив незначимые коэффициенты, с учётом принятых обозначений получим полином

$$2T = 260 + 42,4VУШ + 15L - 4,5L^2 + 5,75q^2, \text{ кН.}$$

5. ЗАДАНИЕ НА ОБРАБОТКУ НАТУРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

1. Используя данные промысловых испытаний комплекса «судно-трал» (табл. 4), произвести расчет коэффициентов полинома трёхфакторной модели по плану Бокса – Бенкина с помощью ЭВМ.

2. Оценить значимость коэффициентов b_i , отбросить незначимые коэффициенты, записать окончательный (итоговый) полином для каждого выходного параметра, используя статистические таблицы [1].

3. Представить графики зависимостей $\hat{V}_s = f(VУШ, \tilde{L}, \tilde{q}_R)$;
 $2\hat{T} = f(VУШ, \tilde{L}, \tilde{q}_R)$; $\hat{N}_{гв} = f(VУШ, \tilde{L}, \tilde{q}_R)$ и $\hat{h} = f(VУШ, \tilde{L}, \tilde{q}_R)$ для случая $\tilde{q}_R = 0$.

Таблица 4

Результаты эксперимента

Номер опыта	План эксперимента			Результат опыта			
	VУШ	$\tilde{L}$	$\tilde{q}_R$	2T, кН	v_c , м/с	$N_{гв}$, кВт	h, м
1	–	–	0	205	2,15	640	160
2	+	–	0	280	2,90	1 910	90
3	–	+	0	230	2,00	760	790
4	+	+	0	310	2,60	2 050	570
5	–	0	–	216	2,10	680	430
6	+	0	–	305	2,85	2 010	310
7	–	0	+	225	2,00	750	460
8	+	0	+	320	2,70	2 080	340
9	0	–	–	240	2,60	1 200	160
10	0	+	–	285	2,40	1 240	680
11	0	–	+	250	2,50	1 220	130
12	0	+	+	270	2,30	1 310	720
13	0	0	0	260	2,35	1 250	392
14	0	0	0	265	2,50	1 200	403
15	0	0	0	255	2,45	1 300	409

6. МАТЕРИАЛЫ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Расчёт коэффициентов модели для одного из выходных параметров (по заданию преподавателя) по бланку-алгоритму.

2. Полиномиальные модели, рассчитанные на ЭВМ.

3. Полиномиальные модели без статистически незначимых коэффициентов. При этом модель должна быть адекватна результатам эксперимента.

4. Графики зависимостей суммарного натяжения ваеров $2T$, скорости судна V_S , мощности на гребном валу $N_{ГВ}$, глубина хода трала h от положения выносного указателя шага винта ВУШ, длины ваеров L при движении судна лагом $q_R = 0$.

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. В чём состоит идея Н. Винера? Как представляется им объект испытаний?
2. В чём заключается идея шагового поиска? Почему эта идея не реализована при проведении комплексных испытаний комплекса «Судно-трал»?
3. Каковы особенности использования методов планирования эксперимента для обработки комплексных испытаний объекта?
4. Каким образом достигнута совместимость факторов при испытании комплекса «Судно-трал»?
5. Какие требования предъявляются к входным параметрам при комплексных испытаниях объекта?
6. По какому критерию проверяется значимость коэффициентов?
7. Какие критерии возможны при выборе планов эксперимента?
9. Каковы достоинства плана Бокса-Бенкина для проведения комплексных испытаний объектов?
10. Какие данные необходимо ввести в ЭВМ для построения полиномиальной модели? Какую дополнительную информацию выдаёт ЭВМ?
11. Какие данные необходимо ввести в ЭВМ для построения графиков?
12. Дайте общие рекомендации по выбору плана эксперимента для комплексных испытаний объектов.

8. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Солодов, В. С. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2012. – 204 с.
2. Солодов В.С. Идентификация комплекса судно-трал методами планирования активного эксперимента : монография / В. С.Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2008. – 248 с. : ил.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДОМ СИМПЛЕКСНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

В сложных радиоэлектронных системах и средствах автоматики на стадии эксплуатации действуют две совокупности процессов: первая совокупность – деградационные процессы, ухудшающие состояние системы с точки зрения безотказности и выводящие параметры за пределы допуска.

Вторая совокупность – стабилизирующие процессы, обеспечивающие сопротивление развитию деградации, поддерживающие работоспособность системы или восстанавливающие, парирующие ухудшение её техническое состояние. Ко второй совокупности процессов относятся такие как настройка и регулировка параметров при функциональном использовании, а также подстройки и регулировки, возникающие в результате замены элементов на этапах технического обслуживания и ремонта.

Цель работы – ознакомить обучаемых с методом симплексного планирования эксперимента для поиска оптимальных соотношений параметров.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Процесс настройки любого объекта на оптимальный режим его работы в ряде случаев представляет определённую сложность и требует знания методов настройки особенно, когда настройке подлежат два и более параметров.

Рассмотрим некоторые из них. Предположим, что показатель качества работы системы J нам известен и измеряется количественно. Зависимость этого показателя от параметра настройки имеет экстремум (максимум или минимум), однако положение этого экстремума априори неизвестно. Требуется найти такие соотношения варьируемых параметров x_i , при которых показатель качества J принимал экстремальное (наилучшее) значение.

Рассмотрим самый простой случай, когда количество настраиваемых параметров $k = 1$ (рис. 1).

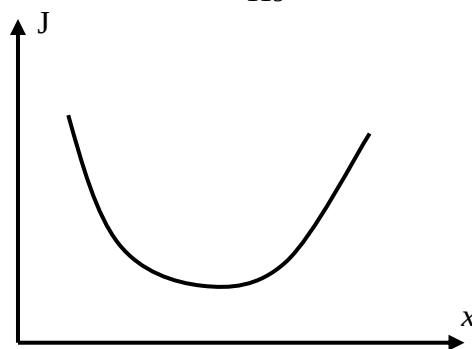


Рис.1. График зависимости $J = f(x)$

На рис. 1 обозначены: x – параметр настройки, J – показатель качества.

Параметрами настройки могут служить сопротивление резистора, ёмкость конденсатора, а также положение рукоятки переменного резистора или переменного конденсатора и др., выраженные в единицах измерения (Ом, мкФ) или в угловых градусах, делениях шкалы изменения сопротивления, емкости и т.п.

Проведя эксперимент в одной точке, и выбрав шаг изменения параметра, можно легко определить направление движения к оптимуму и совершить это движение. Для этого потребуются провести дополнительно эксперимент еще в одной точке x .

Ситуация усложняется при наличии двух варьируемых параметров.

В этом случае рекомендуется использовать методы, основанные на теории планирования эксперимента.

1.1. Принцип симплексного планирования эксперимента

Теория планирования эксперимента дала в руки специалиста по настройке несколько методов поиска оптимальных соотношений параметров системы, как в статическом так и в динамическом режимах. К ним относятся метод крутого восхождения (метод движения по градиенту), метод эволюционного планирования Бокса, метод последовательного симплексного планирования и его различные модификации. Из всех перечисленных методов наиболее приемлемым для оптимизации автоматизированных систем является метод последовательного симплексного планирования или последовательный симплекс-метод (ПСМ) как наиболее простой и устойчивый к внутренним и внешним помехам. Последнее особенно ценно для настройки объектов с наличием внешних и внутренних помех.

Принцип симплексного планирования состоит в том, что условия первой серии опытов в многомерном пространстве соответствуют координатам точек, образующих симплекс. Симплекс, образованный $k + 1$ точками, расположенными на равном расстоянии друг от друга в k -мерном пространстве называется *правильным*. В одномерном пространстве ($k = 1$) симплекс представ-

ляет собой отрезок прямой, при двух факторах – равносторонний треугольник, при трех – тетраэдр. Для симплекса большей размерности геометрического представления не существует, но это не мешает настраивать системы с большим числом параметров настройки. При поиске оптимума симплекс определенным образом перемещается (кантуется) по поверхности отклика.

Перемещение симплекса по поверхности отклика выполняется в следующей последовательности. Из опытов первой серии в вершинах правильного симплекса выбирается точка с наихудшим результатом. Затем определяются координаты новой точки, представляющей собой зеркальное отражение точки с наихудшим результатом относительно противоположной грани симплекса, причем грань в этом случае образуют k точек k -мерного симплекса. Если этой новой точкой заменить точку с наихудшим результатом, то образуется новый правильный симплекс, смещенный в общем случае в сторону улучшения результата. В этой новой точке ставится опыт, результат которого сопоставляется с результатами в оставшихся точках. Выбирается опыт, в котором был получен наихудший результат, и находится его зеркальное отображение и т. д. Таким образом, осуществляется перемещение (кантование) симплекса до тех пор, пока не будет достигнута область оптимума. Пояснить процесс кантования симплекса можно на примере с двумя факторами, симплекс при этом представляет собой правильный треугольник.

На рис. 2 изображен порядок постановки опытов при симплексном планировании. В первой серии ставятся $k + 1$ опытов (точки 1, 2, 3). Последующее кантование симплекса осуществляется путем анализа полученных результатов и сравнения их с результатами опытов в других точках, при этом на каждом шаге реализуется только один опыт. Наихудший результат был получен в точке 1 как наиболее удаленной от оптимума.

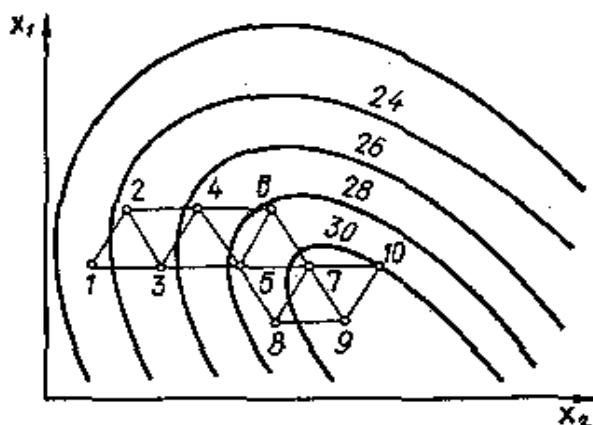


Рис. 2. Геометрическая интерпретация метода последовательного симплексного планирования

Симплекс поворачивается вокруг грани 2–3 и в точке 4 ставится опыт. Теперь анализируются результаты опытов в точках 2, 3 и 4. Затем поворот симплекса осуществляется вокруг грани 3–4, так как наиболее удалена от оптимума точка 2. Определяются координаты точки 5, в которой снова ставится один опыт. Дальнейшее движение симплекса по поверхности отклика понятно из рис. 2.

С выбора исходного симплекса начинается процедура оптимального выбора параметров. Ниже приводятся координаты исходного симплекса для трёх и более параметров оптимизации. Заметим, что координаты исходного симплекса для трёх параметров заданы *целочисленной* матрицей. Это же условие выполняется при настройке системы с семью варьируемыми параметрами ($k = 7$).

Очевидно, что чем больше размеры исходного симплекса, тем быстрее его продвижение к области оптимума. По мере продвижения к области оптимальной настройки размеры симплекса можно уменьшать. При выборе размеров симплекса возможен учет дискретного характера параметров настройки.

На рис. 3 представлены два случая, сигнализирующие о конце оптимизации при настройке объекта по двум параметрам.

Признаками конца настройки системы являются процесс закливания симплекса – поворот симплекса вокруг одной вершины (рис.3,а), либо процесс колебания вершины симплекса относительно одной грани (рис.3,б).

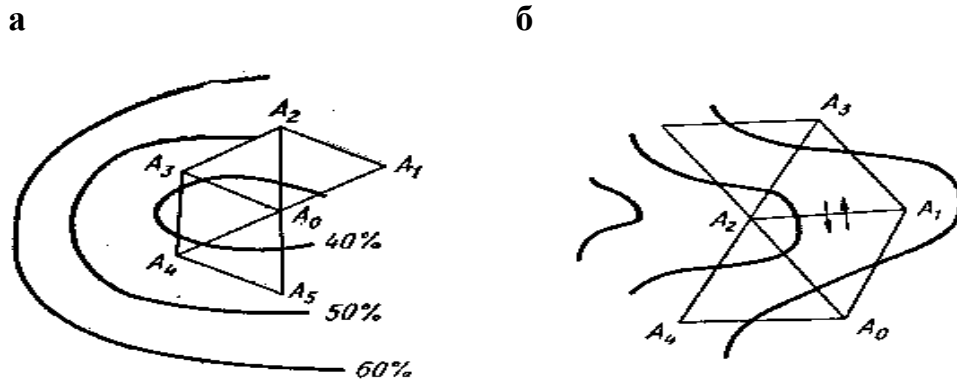


Рис. 3. Схемы окончания процесса оптимизации:
а – схема закливания; б – схема колебаний.

Координаты вершины нового симплекса в общем случае рассчитываются по формуле:

$$x_{j, N+1} = \frac{2}{k} \sum_{u=1}^k x_{j,u} - x_j^*, \quad (1)$$

где $N = k + 1$ – число точек в исходном симплексе; $X_{j, N+1}$ – координата новой точки в натуральных величинах для фактора с номером j ; X_j^* – координата данного фактора в отвергнутом опыте.

Например, необходимо найти координаты четвертой точки $x_{1,4}$ и $x_{2,4}$ по формуле (1), считая, что наихудший результат опыта получился в первой точке ($x_{1,1}^*$)

$$x_{1,4} = \frac{2}{2}(x_{1,2} + x_{1,3}) - x_{1,1}; \quad x_{2,4} = \frac{2}{2}(x_{2,2} + x_{2,3}) - x_{2,1}. \quad (2)$$

В случае настройки системы по двум параметрам нет необходимости использовать данную формулу. Достаточно на листе бумаги нанести прямые линии под углом 60 градусов к оси X и горизонтальные линии. Нанесённые линии образуют поле симплексов, которые используют для настройки системы (рис.4).

На рисунке показана следующая последовательность отображения точек симплекса: 1, 3, 2, 4, 5, 7. После проведения опыта в 9 точке происходит колебание симплекса в области оптимума (точки 7–9) и вращение симплекса вокруг точки 6. Уточнить оптимальное соотношение x_1 и x_2 можно путём уменьшения размера симплекса.

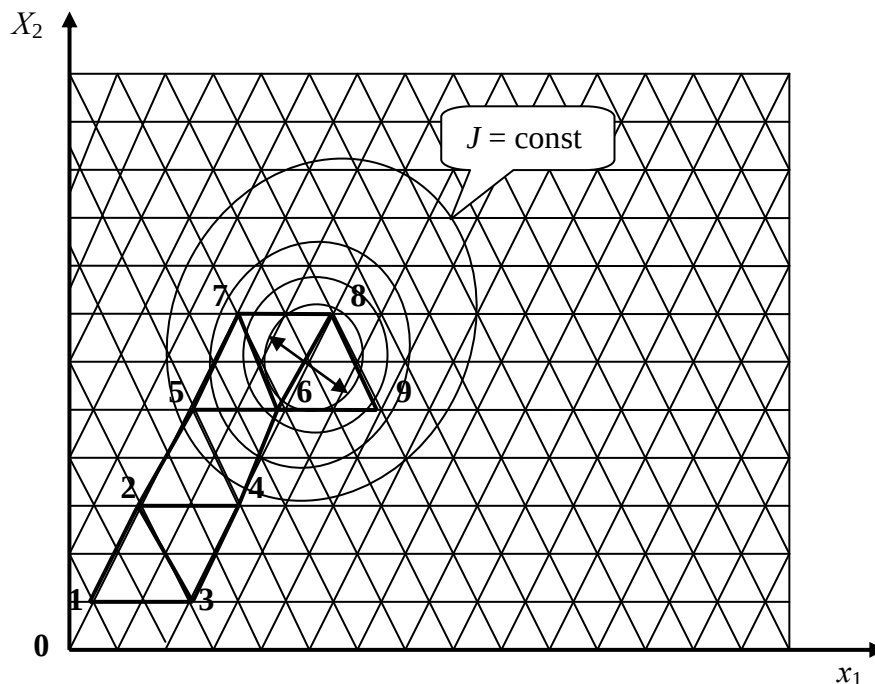


Рис. 4. Геометрическая интерпретация использования симплексной бумаги для поиска оптимальных соотношений параметров.

1.2. Движение симплекса к оптимуму в условиях ограничения на параметры настройки

В реальных условиях на параметр настройки всегда имеются ограничения. Симплекс как многомерная фигура способна к кантованию по поверхности от-

клика. На рисунке 5 иллюстрируется движение симплекса при ограничении на параметр x_1 . Процедура настройки следующая. После проведения опытов в точках 1, 2, 3 и сравнения значений параметра оптимизации наихудшей точкой явилась точка 1. Отражая точку 1 относительно противоположной грани 2-3, точка 4 оказалась за пределами реализуемого значения ($x < a$).

В этом случае отображаем наихудшую из оставшихся точек (точка 2) и проводим опыт в точке 5. Следующий опыт проводим в точке 6, отражая точку 1 и т. д. Аналогично точка 9 как отражение точки 6 не может быть реализована. Следующая наихудшая точка 7 отражается в точку 10, а затем отражается точка 6. Таким образом, симплекс, отталкиваясь от линии ограничения, производит движение к оптимальным соотношениям параметров настройки.

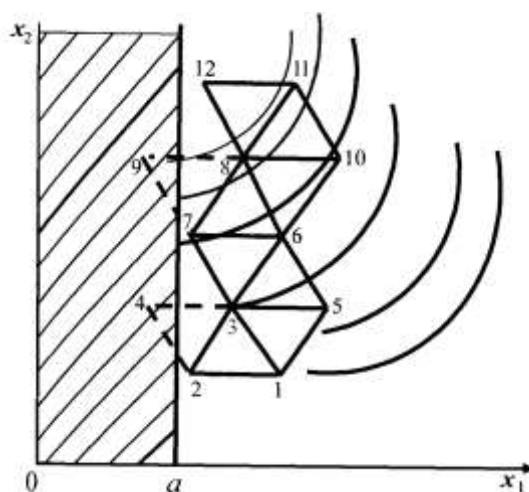
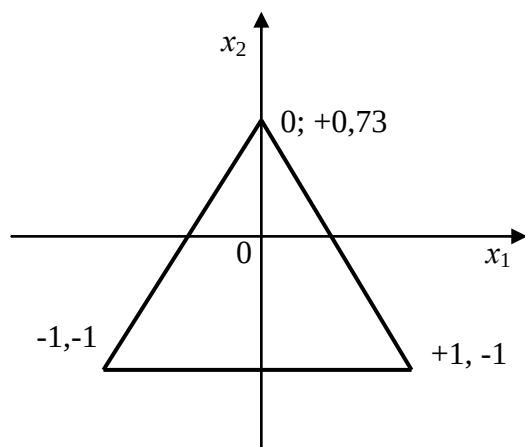


Рис. 5. Движение симплекса в условии ограничения на параметр x_1

1.3. Геометрическая интерпретация и координаты вершин исходных симплексов

a



б

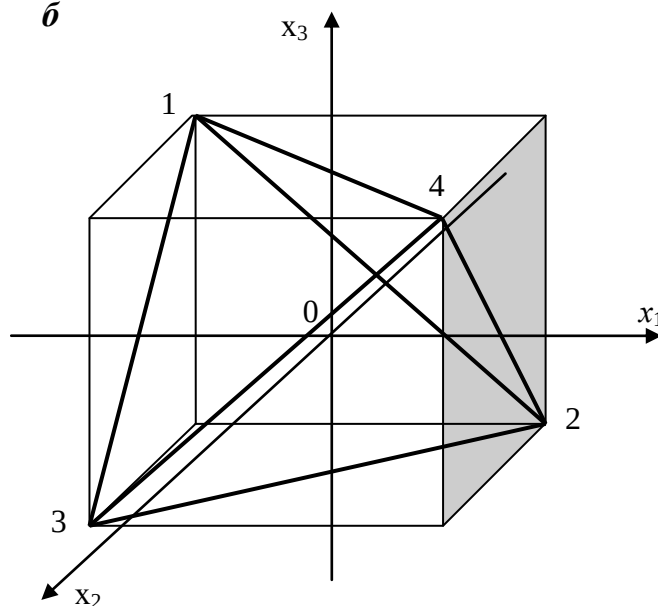


Рис. 6. Геометрическая интерпретация исходных симплексов

a – для $k = 2$; *б* – для $k = 3$

Ниже приводятся координаты вершин исходных симплексов для двух, трёх, четырёх и семи параметров. Следует заметить, что для $k = 3$ и $k = 7$ симплексы целочисленные, т. е. их координаты не отличаются от 1.

Таблица 1

Координаты вершин исходного симплекса для $k=2$

Опыт <i>и</i>	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$
1	-1	-1
2	0	+0,73
3	+1	-1

Таблица 2

Координаты вершин исходного симплекса для $k = 3$

Опыт <i>и</i>	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1

Таблица 3

Координаты вершин исходного симплекса для $k = 4$

Опыт <i>и</i>	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
1	-1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1	+1
3	+1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1
5	-0,618	-0,618	-0,618	-0,618

Для $k = 5$ строка 6 имеет значения всех параметров настройки (-0,38). В других опытах наблюдается закономерность: -1 по диагонали.

Для $k = 6$ строка 7 имеет значение $(-0, 215)$. Наконец, для $k = 7$ матрица целочисленная (табл. 4).

Таблица 4

Координаты вершин исходного симплекса для $k = 7$

Номер опыта	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{x}_7$
1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
3	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
5	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
7	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

ПСМ имеет большое число модификаций, в основе которых положено стремление быстрее достичь оптимума. Следует подчеркнуть, что при всей своей привлекательности модификации, как правило, сложнее в использовании, чем ПСМ, и при решении многих задачах неконкурентоспособны.

1.4. Достоинства и недостатки симплексного метода настройки

Последовательный симплекс-метод обладает рядом достоинств:

1. Во многих производственных процессах оптимум имеет тенденцию сдвигаться со временем. Например, оптимальное соотношение параметров изменяется в основном от условий эксплуатации судна. Поскольку решение о направлении движения в симплекс-процедуре принимается на основе свежих наблюдений (используются только последние $k + 1$ точки), метод хорошо приспособлен к тому, чтобы следовать за сдвигающимся оптимумом процесса в условиях ошибок эксперимента.

2. Этот метод дает строгие указания, когда и как надо изменять условия осуществления процесса для улучшения его характеристик. Процедура хорошо формализована и не претерпевает каких-либо усложнений с ростом числа варь-

ируемых факторов, к тому же с увеличением числа переменных эффективность ПСМ возрастает.

3. Метод достаточно прост. При использовании симплекс-процедуры нет необходимости находить направление крутого восхождения и производить статистический анализ. Для вычисления координат новых точек используются только четыре арифметических действия. Несмотря на то, что процедура является идеальной для управления процессом с помощью вычислительных машин, оптимизирующих процесс с помощью симплекса, вполне можно обходиться без ЭВМ.

4. Для определения направления движения необходимо только сравнить опыты, проранжировать их по результатам и выбрать наихудший. Поэтому симплекс-процедура может использоваться и в тех случаях, когда отклики оцениваются с качественной точки зрения и не измеряются. Отсюда следует также, что ПСМ приспособлен для использования при наличии нескольких параметров оптимизации. Поскольку определение направления движения основано лишь на качественной информации, ПСМ не предъявляет жестких требований к регулярности симплекса (а следовательно, и к строгому поддержанию факторов на заданных уровнях). Если не предполагается в дальнейшем переходить к планированию второго порядка с ядром в виде симплекса, то можно, вообще говоря, применять и нерегулярные симплексы.

5. ПСМ позволяет на любом этапе эксперимента легко добавить еще одну переменную путем дополнительного введения в текущий симплекс-план всего лишь одной точки (опыта), которая вместе с другими точками образует симплекс размерностью, большей на единицу.

6. Решение о дальнейшем движении к оптимуму принимается после каждого очередного опыта, а не после серии опытов, как это имеет место в некоторых других методах. Это обстоятельство имеет большое психологическое значение, так как используя ПСМ, экспериментатор реже сталкивается с ситуацией, при которой ему приходится ставить предусмотренные программой опыты, в которых он ожидает плохих результатов.

К недостатку ПСМ можно отнести:

1. Движение по правилам ПСМ дает ограниченную информацию о характере поверхности отклика.

2. ПРИМЕРЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАСТРОЙКИ

2.1. Пример поиска оптимальных параметров настройки авторулевого «Аист»

Процедура оптимальной настройки авторулевого последовательным симплексным методом (ПСМ) изображена на рис. 7. В качестве критерия оптимизации может быть принят любой из критериев: экономический, технический и др.

Можно принять в качестве критерия оптимизации интегральный критерий вида

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T |\Delta\alpha| dt ,$$

где T – время реализации одного опыта; $\Delta\alpha$ – отклонение судна от заданного курса.

Такой критерий оптимальности можно легко реализовать с помощью дополнительной приставки к авторулевому, состоящей из выпрямителя и интегратора. В качестве интегратора можно использовать операционный усилитель с емкостной обратной связью.

Сигнал в виде отклонения судна от курса снимается с сельсина трансформатора, преобразующего угол отклонения в напряжение. Выпрямитель с интегратором позволяют интегрировать сигнал ошибки при симметричном «рыскании» судна. Необходимым условием настройки авторулевого является постоянство времени реализации опытов (3 – 5 мин).

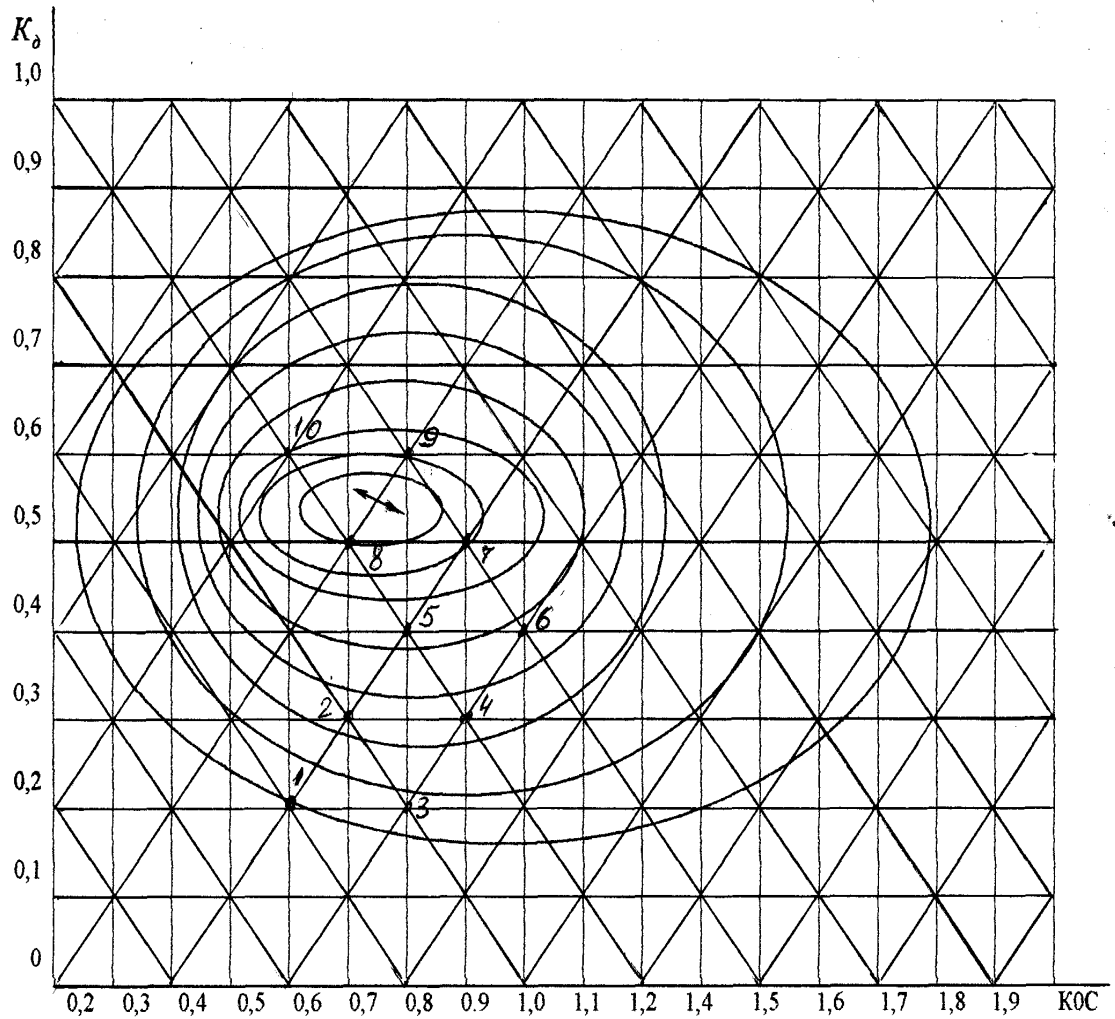


Рис. 7. Движение симплекса в предполагаемую область оптимума

На рисунке исходный симплекс задан координатами точек 1, 2, 3. Далее симплекс движется по пути 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9. Седьмая точка отображается относительно противоположной грани (точки 8-9) в точку 10. В результате проведенного опыта в точке 10 показатель качества работы системы оказался хуже, чем в точке 7. Следовательно, эта точка снова возвращается в точку 7 и т. д. Происходит колебание симплекса относительно грани 8-9. Можно предположить, что оптимальное соотношение параметров K_d и КОС находится на этой грани, либо необходимо уменьшить размеры симплекса и продолжить поиск до того момента, пока можно отличить результаты оптимизации.

2.2. Примеры использования ПСМ для настройки объекта по трём варьируемым параметрам

Геометрическим образом симплекса при $k = 3$ является тетраэдр. Предположим, что вначале опыты проведены в вершинах симплекса 1, 2, 3, 4. Для

тетраэдра, изображённого на (рис. 6, б) координаты вершин исходного симплекса в кодированных единицах записаны в табл. 5.

Таблица 5

Координаты исходного симплекса для $k = 3$

Опыт u	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1

Требуется записать формулы для расчёта координат вершины №5 нового симплекса, если наихудший результат получен в точке №3.

$$x_{1,5} = 2/3 \cdot (x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,4}) - x_{1,3} \quad x_{1,5} = 0,67(-1 + 1 + 1) + 1 = 1,67$$

$$x_{2,5} = 2/3 \cdot (x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,4}) - x_{2,3} \quad x_{2,5} = 0,67(-1 - 1 + 1) - 1 = -1,67$$

$$x_{3,5} = 2/3 \cdot (x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,4}) - x_{3,3} \quad x_{3,5} = 0,67(+1 - 1 + 1) + 1 = 1,67$$

Аналогичным образом находим координаты новых вершин симплекса № 6; № 7; № 8) до возникновения зацикливания, либо колебания (рис. 3.). Например, если предположить, что в процессе настройки наихудшими результатами являются точки № 1, № 4, № 2, то координаты новых вершин (№ 6, № 7, № 8) определяются путём отражения вершин 1 в 6; 4 в 7; 2 в 8.

$$x_{1,6} = 2/3(x_{1,5} + x_{1,2} + x_{1,4}) - x_{1,1}; \quad x_{1,6} = 0,67(1,67 + 1 + 1) + 1 = 3,46;$$

$$x_{2,6} = 2/3(x_{2,5} + x_{2,2} + x_{2,4}) - x_{2,1}; \quad x_{2,6} = 0,67(-1,67 - 1 + 1) + 1 = 2,12;$$

$$x_{3,6} = 2/3(x_{3,5} + x_{3,2} + x_{3,4}) - x_{3,1}; \quad x_{3,6} = 0,67(1,67 - 1 + 1) - 1 = 0,12;$$

$$x_{1,7} = 2/3(x_{1,5} + x_{1,2} + x_{1,6}) - x_{1,4}; \quad x_{1,7} = 0,67(3,46 + 1,67 + 1) - 1 = 3,11;$$

$$x_{2,7} = 2/3(x_{2,5} + x_{2,2} + x_{2,6}) - x_{2,4}; \quad x_{2,7} = 0,67(2,12 - 1,67 + 1) + 1 = 1,97;$$

$$x_{3,7} = 2/3(x_{3,5} + x_{3,2} + x_{3,6}) - x_{3,4}; \quad x_{3,7} = 0,67(0,12 + 1,67 + 1) + 1 = 2,87;$$

$$x_{1,8} = 2/3(x_{1,5} + x_{1,6} + x_{1,7}) - x_{1,2}; \quad x_{1,8} = 0,67(3,11 + 3,46 + 1,67) - 1 = 4,52;$$

$$x_{2,8} = 2/3(x_{2,5} + x_{2,6} + x_{2,7}) - x_{2,2}; \quad x_{2,8} = 0,67(1,97 + 2,12 - 1,67) - 1 = 0,62;$$

$$x_{3,8} = 2/3 (x_{3,5} + x_{3,6} + x_{3,7}) - x_{3,2}; \quad x_{2,8} = 0,67(2,87 + 0,12 + 1,67) - 1 = 3,46.$$

3. РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

3.1. Содержание задания

При выполнении расчётно-графического задания необходимо:

1. Показать на графике движение двухфакторного симплекса к оптимуму при заданных координатах вершины исходного симплекса;
2. Записать формулу и рассчитать координаты новых вершин симплекса при заданных номерах наихудших (отбрасываемых) точек.

3.2. Варианты расчётно-графического задания

Вариант 1

Задание № 1. Укажите координаты вершин исходного симплекса и его движение к оптимуму при условии, что исходное значение параметров: $KOC = 1,5$; $K_o = 0,3$.

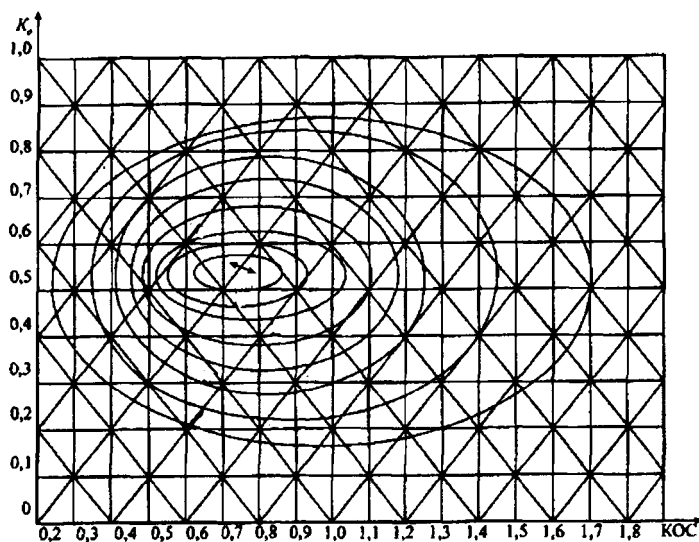


Рис. 8

Поясните окончание процесса оптимизации типа (зацикливание или колебание).

Задание № 2. Запишите формулу для расчёта координат вершины нового симплекса (точка №4) для двух факторов, если координаты отбрасываемой (наихудшей точки) соответствуют опыту №2.

Задание № 3. Запишите координаты вершин (точка 5) нового симплекса для 3-х варьируемых параметров настройки, если наихудший результат в опыте № 3.

Задание № 4. Запишите координаты вершин (точка 6) нового симплекса для 4-х варьируемых параметров настройки, если наихудший результат в опыте № 1.

Координаты исходного симплекса для четырёх параметров настройки представлены в табл. 6.

Таблица 6

Координаты исходного симплекса

Опыт	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
1	-1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1	+1
3	+1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1
5	-0,618	-0,618	-0,618	-0,618

Вариант 2

Задание № 1. Укажите координаты вершин исходного симплекса и его движение к оптимуму при условии, что исходное значение параметров: КОС = 1,5; $K_0 = 0,4$.

Задание № 2. Запишите формулу для расчёта координат вершины нового симплекса (точка № 4) для двух факторов, если координаты отбрасываемой (наихудшей точки) соответствуют опыту № 1, № 3, № 2.

Задание № 3. Запишите координаты вершин (точка 5) нового симплекса для 3 варьируемых параметров настройки, если наихудший результат соответствуют опыту № 3, № 1, № 2.

Задание № 4. Запишите координаты вершин (точка 6) нового симплекса для 4 варьируемых параметров настройки (табл.7), если наихудший результат соответствуют опыту № 1, № 2, № 4.

Таблица 7

Координаты исходного симплекса при $k = 4$

Опыт	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
1	-1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1	+1
3	+1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1
5	-0,618	-0,618	-0,618	-0,618

Вариант 3

Задание № 1. Укажите координаты вершин исходного симплекса и его движение к оптимуму при условии, что исходное значение параметров: КОС = 1,5; K_0

= 0,7.

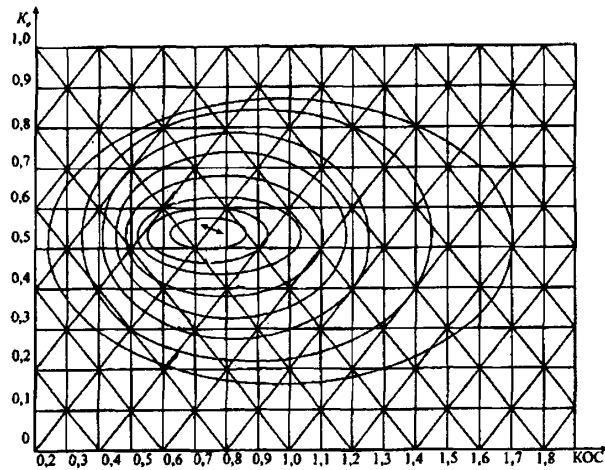


Рис.9

Поясните окончание процесса оптимизации типа (зацикливание или колебания).

Задание № 2. Запишите формулу для расчёта координат вершины нового симплекса (точка № 4) для двух факторов, если координаты отбрасываемой (наихудшей точки) соответствуют точке № 1.

Задание № 3. Запишите координаты вершин (точка 5) нового симплекса для 3-х варьируемых параметров настройки, если наихудший результат соответствуют опыту № 2

Задание № 4. Запишите координаты вершин (точка 6) нового симплекса для 4-х варьируемых параметров настройки, если наихудший результат в точке № 1.

Координаты исходного симплекса представлены табл.8.

Таблица 8

Координаты исходного симплекса

Опыт	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
1	-1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1	+1
3	+1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1
5	-0,618	-0,618	-0,618	-0,618

Задание № 5. Геометрическая интерпретация исходного симплекса трёх факторов тетраэдр (рис.10). Записать координаты вершин исходного симплекса в виде таблицы; определить координаты вершины № 5 нового симплекса, если наихудший результат соответствуют опыту № 2

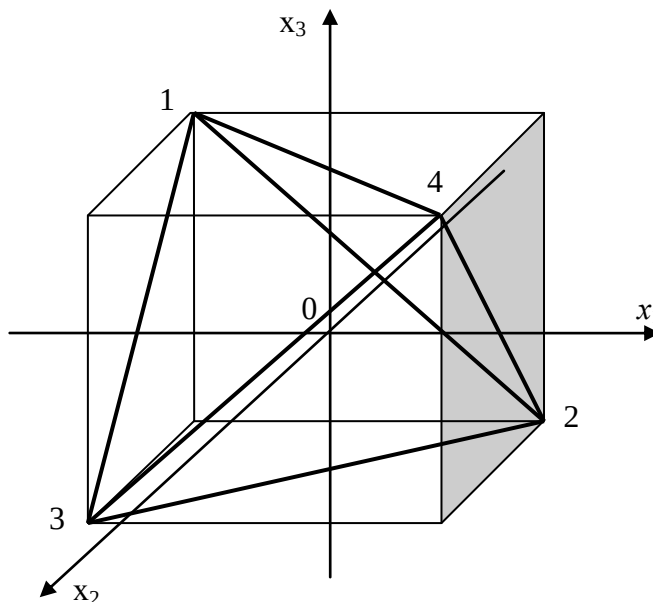


Рис.10

4. МАТЕРИАЛЫ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫЕ НА ЗАЩИТУ

На защиту практической работы «Поиск оптимальных соотношений параметров методом симплексного планирования» обучаемый должен представить следующие материалы:

1. Координаты вершин исходного симплекса и его движение к оптимуму при условии, указанном в варианте. Отметить условие окончания процесса оптимизации.
2. Запись формулы для расчёта координат вершины нового симплекса (точка № 4 или № 5) для заданного числа факторов и координаты заданной отбрасываемой (наихудшей точки).

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение симплекса как геометрической фигуры.
2. Запишите общую формулу для расчёта координаты нового симплекса.
3. Поясните движение симплекса и действие оператора в условиях ограничений на параметры для случая $k = 2$.
4. Поясните окончание процесса оптимизации в случае колебания и заикливания.
5. Перечислите основные достоинства и недостатки ПСМ.
6. Какие модификации ПСМ Вы знаете?
7. Какие методы поиска оптимальных соотношений параметров вам известны?
8. Для каких симплексов координаты вершин целочисленные?

9. Каково геометрическое представление симплексов для двух, трёх и четырёх параметров оптимизации?
10. В чём особенность поиска оптимальных соотношений для трёх и семи параметров?

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Солодов, В. С. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2012. – 204 с. ил.
2. Солодов, В. С. Идентификация комплекса судно – трал с использованием методов планирования активного эксперимента / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2008. – 237 с. : ил.
3. Калитёнков, Н. В. Надёжность и диагностика транспортного радиооборудования и средств автоматики : Учеб. пособие / Н.В. Калитёнков, В. С. Солодов. – Москва: МОРКНИГА, 2012. – 521 с.
4. Солодов, В. С. Техническая диагностика радиооборудования и средств автоматики. Курс лекций : учеб. пособие по дисциплине "Надёжность и техническая диагностика РЭО" для студентов и курсантов технических специальностей / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2015. – 176 с. : ил.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – ознакомить обучаемых с принципами и методами прогнозирования технического состояния объектов; привить навыки построения прогнозирующих моделей непрерывных объектов.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Прогнозирование технического состояния объекта представляет собой процесс определения технического состояния (ТС) объекта на предстоящий интервал времени на основании изучения тщательно отобранных данных, которые могут быть получены на основе наблюдений или на основе спланированного эксперимента.

1.1. Виды прогнозирования технического состояния объекта

- 1) *аналитическое*, основанное на степенных рядах и уравнениях регрессии;
- 2) *вероятностное*, основанное на теории вероятности;
- 3) *статистическая классификация*, основанная на теории распознавания образов.

1.2. Аналитическое прогнозирование

Этот вид прогнозирования наиболее эффективен для радиоэлектронного оборудования (РЭО) и средств автоматики (СА), когда изменение ТС происходит постепенно с определенной тенденцией и когда проводится периодический контроль, требующий прогнозирования ТС на период между контрольными операциями. В этом случае с помощью аналитической функции $W(t)$, учитывающей тенденцию изменения параметров объекта во времени, экстраполируется изменение параметров ТС на последующие промежутки времени. Тенденция изменения параметров учитывается соответствующими коэффициентами выбранной аналитической функции $W(t)$.

Постановка задачи аналитического прогнозирования иллюстрируется рис. 1. В процессе эксплуатации за время T_1 в результате периодического контроля известны значения контролируемой функции

$$W(t_i) = \varepsilon(t_i); t_i \in T_1; i = 1, 2, \dots, n.$$

Необходимо определить значение этой функции за период T_2 .

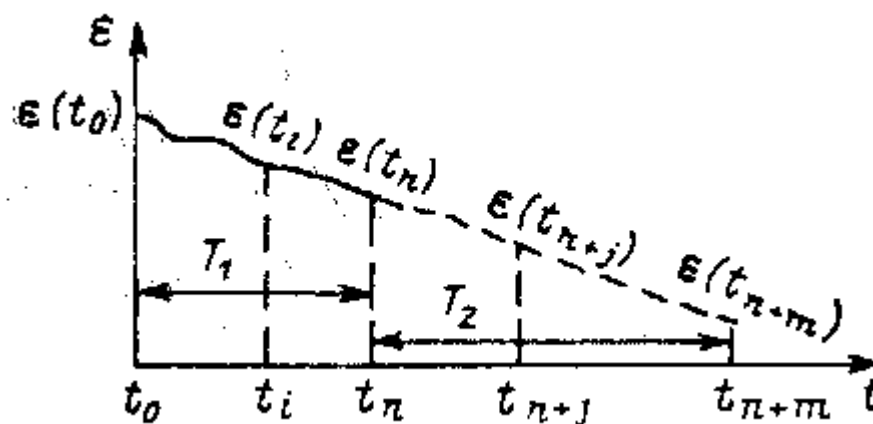


Рис.1. Зависимость контролируемого параметра от времени и его аналитическое прогнозирование

Функция $W(t)$ может быть представлена полиномом вида

$$W(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_l t^l + \dots + b_m t^m,$$

где $b_0, \dots, b_m$ – коэффициенты, определяемые по результатам измерений параметра $\varepsilon(t_i)$.

Коэффициенты b_i при принятой зависимости $W(t)$ определяются неоднозначно, так как через область значений $\varepsilon(t_i)$ может быть проведено множество кривых. В связи с этим при определении значений b_i используются критериальные методы, наибольшее распространение из которых получил метод наименьших квадратов.

Точность прогноза зависит от того, какой закон используется и насколько правильно и точно он описывает поведение объекта.

Используются следующие модели: прямая линия, экспонента, полином. Для решения задачи прогнозирования все время поведения объекта разделяется на два интервала: T_1 – интервал наблюдения за поведением объекта; T_2 – интервал, в котором осуществляется прогнозирование.

При прогнозировании во времени увеличение T_1 означает увеличение факторного пространства. Однако увеличение интервала наблюдения приводит к дополнительным затратам, связанным с выполнением длительного эксперимента или дополнительной обработкой данных, характеризующих поведение объекта. В связи с этим на практике при прогнозировании состояния ОД стараются по возможности сократить величину T_1 .

При построении прогнозирующей модели можно использовать однофакторный подход к эксперименту, или многофакторный.

Однофакторный подход имеет следующие недостатки.

Во-первых, рассматривая только один фактор – время, традиционно не учитываются другие факторы. Например, не учитываются температура окружающей среды, коэффициент нагрузки прибора и другие, которые, например, при расчете надежности учитываются в виде поправочных коэффициентов a_i .

Во-вторых, возникает сложность статистической обработки результатов и как следствие, её отсутствие.

Кроме того, при однофакторном подходе к прогнозированию принципиально не может быть учтен *фактор взаимодействия параметров* b_{ij} , который иногда играет решающую роль в описании поведения объекта.

1.3. Применение экспоненциальной функции для прогнозирования технического состояния объекта

При прогнозировании технических состояний объектов широко применяется в качестве прогнозирующей функции экспоненциальная функция

$$Y(t) = a \exp(bt),$$

где a, b – коэффициенты, определяемые по $y(t_i)$

Неизвестные коэффициенты a и b вычисляются по двум значениям

$$y(t_{n-1}) \text{ и } y(t_n).$$

Прогнозирующая зависимость находится путем решения системы уравнений (1)

$$\begin{aligned} y(t_{n-1}) &= a \exp(bt_{n-1}); \\ y(t_n) &= a \exp(bt_n) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{в виде } Y(t) = y(t_n) \exp \left[\frac{t - t_n}{t_n - t_{n-1}} \ln \frac{y(t_n)}{y(t_{n-1})} \right] \quad (2)$$

Экспонента как математическая модель используется в тех случаях, когда процессы, протекающие в объекте, близки к экспоненциальным. С другой стороны достоверность двух параметров, определяемых всего лишь по двум точкам, явно недостаточна.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МПАЭ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА

2.1. Особенности применения МПАЭ для прогнозирования технического состояния объекта при действии фактора – времени

При применении методов планирования активного эксперимента (МПАЭ) для описания поведения объекта используются полиномиальные модели.

Полиномиальная модель весьма удобна для решения практических задач. Описание объекта с помощью такой модели легко уточнить, повышая порядок полинома.

Особенностью использования МПАЭ для прогнозирования является то, что мы имеем дело со *случайными процессами*, представляющими изменения случайной величины при изменении неслучайного параметра – времени, то есть планирование эксперимента применяется *с ограничением на рандомизацию фактора времени*. Это обстоятельство следует учитывать при со-

ставлении плана. Рандомизацию опытов проводят для того, чтобы внести в процесс элемент случайности, чтобы избавиться от неучтенных факторов. С другой стороны все существующие методы прогнозирования не предполагают и не ставят вопрос о том, чтобы фактор времени сделать случайной величиной.

2.1.1. Построения однофакторных прогнозирующих моделей

При учете влияния только одного фактора времени МПАЭ позволяют построить прогнозирующий полином по трем и по пяти точкам.

В случае нелинейного характера изменения прогнозируемого параметра можно использовать квадратичный полином вида

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \tau_1 + b_{11} \tau_1^2 \quad (3)$$

где τ – кодированное (относительное) время не связанное с началом координат, вычисляется по формулам (1.18);

$$\tilde{\tau} = \frac{t - t_0}{\Delta t}, \quad (4)$$

где $t_0 = 0,5 \cdot (t_{\max} + t_{\min})$; $\Delta t = 0,5(t_{\max} - t_{\min})$;

b_i – коэффициенты квадратичного полинома вычисляются по формулам (5) – по трем равноотстоящим по времени точкам

$$b_0 = y_2, \quad b_1 = \frac{y_3 - y_1}{2}, \quad b_{11} = 0,5(y_3 + y_1) - y_2 \quad (5)$$

или (6) – по пяти равноотстоящим точкам:

$$b_0 = y_3; \quad b_1 = \frac{1}{3}[(y_4 + y_5) - (y_1 + y_2)] \quad b_{11} = 0,5(y_5 + y_1) - y_3. \quad (6)$$

Формулы (6) позволяют более точно определить значение коэффициента b_1 (линейный эффект), характеризующий наклон характеристики, так как, для его определения используются четыре измерения.

2.2. Примеры построения полиномиальной модели для прогнозирования технического состояния объекта

Пример 1. В процессе эксплуатации были измерены значения сопротивления изоляции R асинхронного двигателя в моменты $t_1 = 1\,000$ ч, $R(t_1) = 0,5 \cdot 10^6$ Ом; $t_2 = 5\,000$ ч, $R(t_2) = 0,4 \cdot 10^6$ Ом; $t_3 = 9\,000$ ч, $R(t_3) = 0,32 \cdot 10^6$ Ом.

Требуется по результатам измерений произвести прогноз сопротивления изоляции двигателя на 10 000 ч.

Построим полиномиальную модель по трем измерениям.

Решение. В соответствии с формулами (5) получим коэффициенты модели

$$b_0 = 0,4; \quad b_1 = 0,5(0,32 - 0,5) = -0,09; \quad b_{11} = 0,5(0,5 + 0,32) - 0,4 = 0,01$$

и полином

$$R(\tau) = (0,4 - 0,09\tau + 0,01\tau^2) \cdot 10^6 \text{ Ом.}$$

Переведем абсолютное значение времени t в кодированную величину τ

$$\tau = \frac{t - t_0}{\Delta t} = \frac{10\,000 - 5\,000}{4\,000} = 1,25$$

Прогноз сопротивления изоляции при $\tau = +1,25$ определится

$$R(\tau) = 0,4 - 0,09(1,25) + 0,01(1,25)^2 = 0,303 \cdot 10^6 \text{ Ом.}$$

Пример 2. В процессе эксплуатации проводились измерения значений прогнозируемого параметра Y через равные промежутки времени Δt (табл. 1). Требуется:

1. Определить коэффициенты интерполяционного полинома по пяти измерениям. Сравнить полученные результаты.

Таблица 1

Измерение	1	2	3	4	5
t , ч	5 000	7 000	9 000	11 000	13 000
Y	4.5	4.8	5.3	6.0	7.0

2. Определить аналитическим путем значение параметра, которое ожидается через Δt ч после последнего измерения. Построить графики изменения технического состояния объекта с указанием значения параметра Y на прогнозируемый период. Величина Δt задается преподавателем.

3. Определить время t достижения прогнозируемым параметром величины $Y = 8$.

Решение. Коэффициенты определятся по формулам (6), т. е.

$$b_0 = y_3; \quad b_1 = \frac{1}{3}[(y_4 + y_5) - (y_1 + y_2)]; \quad b_{11} = 0,5(y_5 + y_1) - y_3.$$

Определим коэффициенты полинома

$$b_0 = 5,3; \quad b_1 = \frac{1}{3}[(6,0 + 7,0) - (4,5 + 4,8)] = 1,23; \quad b_{11} = 0,5(4,5 + 7,0) - 5,3 = 0,45$$

и полином

$$Y^* = 5,3 + 1,23\tau + 0,45\tau^2$$

Для определения времени достижения прогнозируемым параметром значения 8,0 необходимо решить квадратное уравнение относительно τ , подставив в левую часть уравнения значение 8,0.

$$0,45\tau^2 + 1,23\tau + 5,3 - 8,0 = 0$$

или

$$0,45\tau^2 + 1,23\tau - 2,7 = 0$$

$$\tau = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\tau = \frac{-1,23 \pm \sqrt{1,51 - 4 \cdot 0,45(-2,7)}}{2 \cdot 0,45};$$

$$\tau_1 = 1,44; \quad \tau_2 = -4,17.$$

Решив квадратное уравнение, получим время в относительных единицах $\tau = 1,44$.

Переведя кодированное время в абсолютное по формуле $t = \tau \cdot \Delta t + t_0$ при $\Delta t = 4\,000$ и $t_0 = 9\,000$ получим

$$t = 1,44 \cdot 4\,000 + 9\,000 = 14\,760 \text{ ч.}$$

3. РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

3.1. Содержание задания

Расчетно-графическое задание включает в себя три частных задания.

Задание 1. Расчет прогнозирующего линейного двухфакторного полинома. Проводились опыты согласно полному факторному эксперименту ПФЭ 2^2 (табл. 2).

Таблица 2

ПФЭ 2^2

Опыт	План		Результат опыта	
	x_1	x_2	y_{u1}	y_{u2}
1	-1	-1	y_{11}	y_{21}
2	+1	-1	y_{12}	y_{22}
3	-1	+1	y_{13}	y_{23}
4	+1	+1	y_{14}	y_{24}

Требуется построить интерполяционный полином и провести полную статистическую обработку. Прогнозировать техническое состояние объекта на 0,5 τ после последнего измерения. Определить время достижения прогнозируемым параметром заданного значения. Расчет произвести при мини-

мальном значении фактора X_1 (четные варианты), при максимальном значении фактора X_1 (нечетные варианты).

Задание 2. Расчет нелинейного прогнозирующего полинома по одному фактору.

В процессе эксплуатации проводились измерения значений прогнозируемого параметра Y через равные промежутки времени Δt (табл. 3).

1. Определить коэффициенты интерполяционного полинома по трем и пяти точкам, используя все факторное пространство. Сравнить полученные результаты.

Таблица 3

Номер измерения	1	2	3	4	5
$t, \text{ч}$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Y	0,5	0,45	0,4	0,34	0,32

Определить аналитическим путем значение параметра, которое ожидается через 500 ч после последнего измерения. Построить графики изменения технического состояния объекта с указанием значения параметра Y на прогнозируемый период.

2. Определить время достижения прогнозируемым параметром величины, заданной преподавателем.

Задание 3. Построение прогнозирующего полинома по двум факторам.

Прогнозируемый параметр измерялся через равные промежутки времени $\Delta t = 4\,000$ часов согласно ортогональному центральному композиционному плану (ОЦКП), представленному в табл. 3.3.

Определить коэффициенты прогнозирующего полинома. Провести статистическую обработку полученной модели. Условимся, что процесс по G -критерию воспроизводим. Ошибку опыта принять 5 % от среднего значения прогнозируемого параметра ($s_y = 5\%$). Определить значение прогнозируемого параметра, которое ожидается через $\tau = 0,2$ после последнего измерения. Расчет произвести при минимальном значении фактора x_1 (четные варианты), при максимальном значении фактора x_1 (нечетные варианты).

Таблица 4

План эксперимента и расчётная матрица $Y = f(\tilde{x}_1, \tau)$

Номер опыта u	План эксперимента		Результат измерения	Результат вычисления	Невязка абсолютная
	$\tilde{x}_1$	τ	Y_u	Y_u^*	$ Y_u - Y_u^* $
1	+	—	Y_1		

2	0	–	Y_2		
3	–	–	Y_3		
4	–	0	Y_4		
5	0	0	Y_5		
6	+	0	Y_6		
7	+	+	Y_7		
8	–	+	Y_8		
9	0	+	Y_9		

3.2. Варианты расчётно-графического задания

Варианты задания 1

Вариант 1

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	60	56
2	+	–	29	31
3	–	+	43	45
4	+	+	20	22

Вариант 2

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	26	24
2	+	–	34	38
3	–	+	137	135
4	+	+	146	150

Вариант 3

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	100	106
2	+	–	120	118
3	–	+	320	328
4	+	+	340	350

Вариант 4

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	40	37
2	+	–	50	47
3	–	+	120	126
4	+	+	140	146

Вариант 5

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	135	128

Вариант 6

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	9	8,9

2	+	–	85	81
3	–	+	340	346
4	+	+	235	230

2	+	–	13	15
3	–	+	20	22
4	+	+	26	29

Вариант 7

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	86	90
2	+	–	80	82
3	–	+	19	21
4	+	+	54	52

Вариант 8

Опыт	План		Результат опыта	
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_{u1}	y_{u2}
1	–	–	96	94
2	+	–	100	106
3	–	+	28	32
4	+	+	63	65

Таблица 5

Варианты задания 2

Вариант	Номер измерения	1	2	3	4	5
1	t , ч	2 000	6 000	10 000	14 000	18 000
	y	6	5.25	4.2	2.5	0.5
2	t , ч	1 000	3 000	5 000	7 000	9 000
	y	4.0	4.3	4.6	5.0	5.7
3	t , ч	1 000	5 000	9 000	13 000	17 000
	y	0.42	0.45	0.57	0.72	0.93
4	t , ч	4 000	6 000	8 000	10 000	12 000
	y	0.45	0.49	0.54	0.60	0.69
5	t , ч	6 000	8 000	10 000	12 000	14 000
	y	0.48	0.54	0.60	0.70	0.78
6	t , ч	4 000	6 000	8 000	10 000	12 000
	y	0.55	0.53	0.48	0.42	0.35
7	t , ч	2 000	4 000	6 000	8 000	10 000
	y	0.5	0.45	0.4	0.34	0.32
8	t , ч	1 000	5 000	9 000	13 000	17 000
	y	0.41	0.45	0.57	0.72	0.94
9	t , ч	1 000	3 000	5 000	7 000	9 000
	y	4.0	4.3	4.6	5.0	5.8
10	t , ч	6 000	8 000	10 000	12 000	14 000
	y	0.49	0.54	0.60	0.70	0.80

Варианты задания 3

Вариант	Результаты измерений параметра по ОЦКП								
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9
1	95	90	80	50	60	70	50	20	35
2	90	85	75	50	60	70	55	25	40
3	90	80	75	55	65	75	60	35	50
4	85	80	70	45	55	70	50	25	40
5	95	90	80	50	60	70	50	20	40
6	85	80	70	45	55	65	45	20	30
7	85	75	70	50	60	70	55	30	45
8	80	70	65	40	50	60	45	15	30
9	100	95	85	55	65	75	55	25	40
10	80	75	70	40	50	60	40	20	30

Пример 3. Построение прогнозирующего полинома с учетом влияния двух факторов: температуры окружающей среды и времени.

Проводилось наблюдение за изменением коэффициента усиления трех однотипных усилителей, эксплуатируемых при различных температурах окружающей среды. Измерения коэффициента осуществлялись через равные промежутки времени $\Delta t = 4\,000$ ч. на трех уровнях: $t_1 = 1\,000$ ч, $t_2 = 5\,000$ ч, $t_3 = 9\,000$ ч. Эксперимент проводился по ортогональному центральному композиционному плану ОЦКП.

Требуется построить прогнозирующий полином (рассчитать коэффициенты полинома, проверить их значимость и адекватность модели для использования в качестве прогнозирующего полинома).

По формулам (1.25) рассчитаем коэффициенты полинома вида

$$\hat{K} = b_0 + b_1 \tilde{T} - b_2 \tau + b_{12} \tilde{T} \cdot \tau - b_{11} \tilde{T}^2 + b_{22} \tau^2 \quad (7)$$

Таблица 10

План эксперимента и расчётная матрица $K = f(T, \tau)$

Номер опыта	План эксперимента	Результат измерения	Расчёт	Невязка абсолют	Невязка относи-
-------------	-------------------	---------------------	--------	-----------------	-----------------

и					ная	тельная
	T	τ	K	$\hat{K}$	$ K - \hat{K} $	$ K - \hat{K} \%$
1	+	-	107,0	108,9	1,1	1,5
2	0	-	94,0	92,4	1,6	2,3
3	-	-	79,0	75,9	3,1	4,4
4	-	0	51,0	53,4	2,4	3,4
5	0	0	70,0	69,9	0,1	0,1
6	+	0	85,0	86,4	1,4	2,0
7	+	+	66,0	63,9	2,1	3,0
8	-	+	29,0	30,9	0,1	0,1
9	0	+	50,0	47,4	2,6	3,7

$$b_{11} = \frac{1/3(107 + 79 + 51 + 85 + 66 + 29) - 2/3(94 + 70 + 50)}{2} =$$

$$= \frac{1}{6}[(417) - 2(94 + 70 + 50)] = \frac{417 - 428}{6} = -1,83;$$

$$b_{22} = \frac{1/3(107 + 94 + 79 + 66 + 29 + 50) - 2/3(51 + 70 + 85)}{2} = 2,17;$$

$$b'_0 = \frac{1}{9}(107 + 94 + 79 + 51 + 70 + 85 + 66 + 29 + 50) = 70,11;$$

$$b_0 = 70,11 - 2/3(-1,83 + 2,17) = 69,9.$$

$$b_1 = \frac{1}{6}(107 - 79 - 51 + 85 + 66 - 29) = 16,5;$$

$$b_2 = \frac{1}{6}(-107 - 94 - 79 + 66 + 29 + 50) = -22,5;$$

$$b_{12} = \frac{1}{4}(-107 + 79 + 66 - 29) = 2,25.$$

Подставив найденные коэффициенты в общее выражение (7), получим полином вида

$$\hat{K} = 69,9 + 16,5\tilde{T} - 22,5\tau + 2,25\tilde{T} \cdot \tau - 1,83\tilde{T}^2 + 2,17\tau^2 \quad (8)$$

Статистическая обработка результатов эксперимента заключается в проверке значимости коэффициентов модели и адекватности модели экспериментальным данным.

Для проверки значимости коэффициентов модели используется t -критерий Стьюдента. Согласно этому критерию коэффициент признается значимым, если выполняется условие $|b_i| > t \cdot s\{b_i\}$, т.е. абсолютное значение коэффициента больше доверительного интервала $\Delta b = t \cdot s\{b_i\}$.

Зададимся 5% ошибкой опыта $s_y = 3,5$, что составляет 5% от среднего значения коэффициента b_0 , тогда дисперсия $s_y^2 = 12,25$.

Определим дисперсии коэффициентов

$$s^2\{b_0\} = \frac{5}{9} s_y^2 = \frac{5}{9} \cdot 12,25 = 6,8; \quad s^2\{b_1\} = s^2\{b_2\} = \frac{s_y^2}{6} = \frac{12,25}{6} = 2,04;$$

$$s^2\{b_{11}\} = s^2\{b_{22}\} = \frac{s_y^2}{2} = \frac{12,25}{2} = 6,125; \quad s^2\{b_{12}\} = \frac{s_y^2}{4} = \frac{12,25}{4} = 3,06$$

Найдем табличное значение критерия Стьюдента при $f_y = 9$: $t = 2,26$ и значимость коэффициентов

$$|b_0| = 69,9 > 2,26 \cdot \sqrt{6,8} = 5,89; \quad |b_1| = 16,5 > 2,26 \cdot \sqrt{2,04} = 3,23;$$

$$|b_2| = 22,5 > 2,26 \cdot \sqrt{2,04} = 3,23; \quad |b_{11}| = 1,83 < 2,26 \cdot \sqrt{6,125} = 5,59;$$

$$|b_{22}| = 2,17 < 5,59; \quad |b_{12}| = 2,25 < 2,26 \cdot \sqrt{3,06} = 3,94.$$

Таким образом, все коэффициенты кроме b_0 , b_1 и b_2 признаются незначимыми, так как не выполняется неравенство $|b_i| > t \cdot s\{b_i\}$, т.е. абсолютное значение остальных коэффициента меньше доверительного интервала $\Delta b = t \cdot s\{b_i\}$.

После исключения из модели незначимых коэффициентов получим полином вида

$$\hat{K} = 69,9 + 16,5\tilde{T} - 22,5\tau \quad (9)$$

Для проверки адекватности линейной модели определим доверительный интервал $\Delta Y = t \cdot s_y$ при степени свободы $f_y = 9$; $t = 2,26$ (см. Приложение 4).

$$\Delta Y = 2,26 \cdot 3,5 = 7,91$$

Анализируя данные табл. 10, можно сделать вывод, что линейный полином адекватно описывает зависимость $K = f(T, \tau)$, так как максимальное значение невязки (отклонения измеренного значения параметра K от вычисленного) составляет $|K - \hat{K}|_{\max} = 3,1 < 7,91$ (см. опыты 3 табл. 10).

На рис. 2 представлен графики линейной модели (9)

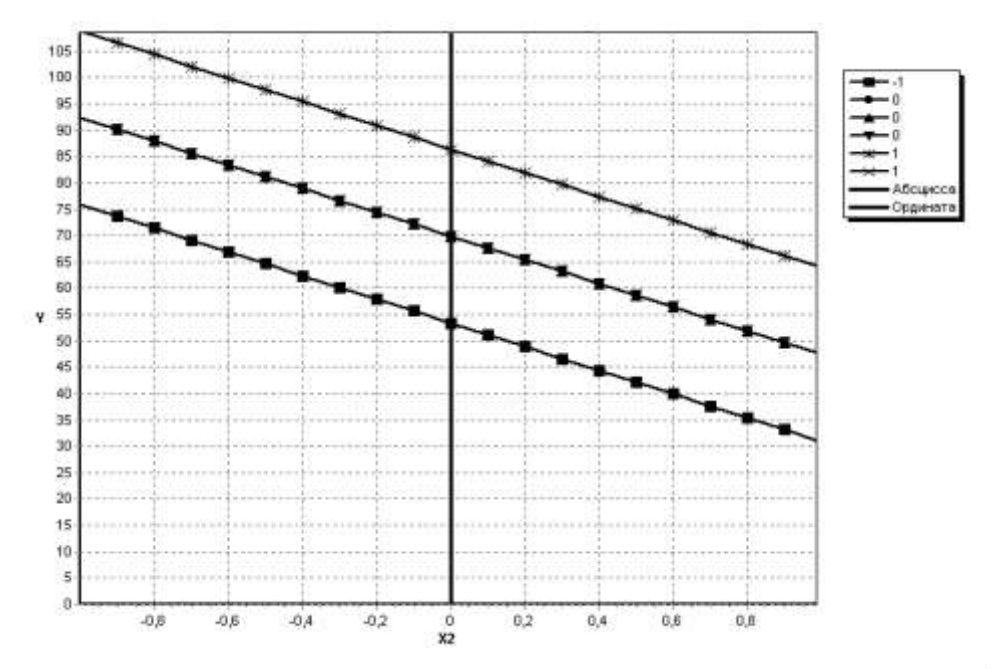


Рис. 2. График линейной модели изменения коэффициента усиления усилителя

В данном примере задана 5 % ошибка эксперимента. Если задать меньшую ошибку, например 2,5 %, то часть или все коэффициенты могут оказаться значимыми, а линейная модель - неадекватной.

Проверим это на примере.

Зададимся ошибкой опыта $s_y = 1,75$, что составляет 2,5% от среднего значения коэффициента b_0 , тогда дисперсия $s_y^2 = 3,06$.

Определим дисперсии коэффициентов

$$s^2\{b_0\} = \frac{5}{9} s_y^2 = \frac{5}{9} \cdot 3,06 = 1,7; \quad s^2\{b_1\} = s^2\{b_2\} = \frac{s_y^2}{6} = \frac{3,06}{6} = 0,51;$$

$$s^2\{b_{11}\} = s^2\{b_{22}\} = \frac{s_y^2}{2} = \frac{3,06}{2} = 1,53; \quad s^2\{b_{12}\} = \frac{s_y^2}{4} = \frac{3,06}{4} = 0,765$$

и значимость коэффициентов

$$|b_0| = 69,9 > 2,26 \cdot \sqrt{1,7} = 2,94; \quad |b_1| = 16,5 > 2,26 \cdot \sqrt{0,51} = 1,61;$$

$$|b_2| = 22,5 > 2,26 \cdot \sqrt{0,51} = 1,61 \quad ; \quad |b_{11}| = 1,83 < 2,26 \cdot \sqrt{1,53} = 2,8;$$

$$|b_{22}| = 2,17 < 2,8; \quad |b_{12}| = 2,25 > 2,26 \cdot \sqrt{0,765} = 1,97.$$

Таким образом, коэффициенты b_{11} , b_{22} признаются незначимыми, так как не выполняется неравенство $|b_i| > t \cdot s\{b_i\}$, т.е. абсолютное значение коэффициента меньше доверительного интервала $\Delta b = t \cdot s\{b_i\}$, а коэффициент b_{12} – значим.

Получен неполный квадратичный полином вида

$$\hat{K} = 69,9 + 16,5\tilde{T} - 22,5\tau + 2,25\tilde{T} \cdot \tau \quad (10)$$

Для проверки адекватности модели определим доверительный интервал $\Delta Y = t s_y$ при степени свободы $f_y = 9$; $t = 2,26$.

$$\Delta Y = 2,26 \cdot 1,75 = 3,95.$$

Модель адекватна, так как максимальное значение невязки составляет $|K - \hat{K}|_{\max} = 2,6 < 3,95$ (опыт 9 табл. 10).

Полученный интерполяционный полином можно использовать для определения значения прогнозируемого параметра K за пределами интервала варьирования t и T° .

Таблица П.1.5

План, результаты эксперимента, расчетные
данные для проверки адекватности модели

Номер опыта	План		Результат эксперимента	Расчет	Невязка абсолютная
	T	τ	K	$\hat{K}$	$ K - \hat{K} $
1	+	-	107,0	106 ,65	0,35
2	0	-	94,0	92, 4	1,6
3	-	-	79,0	78, 17	0,83
4	-	0	51,0	53, 4	2,4
5	0	0	70,0	69, 9	0,1

6	+	0	85,0	86, 4	1,4
7	+	+	66,0	66, 75	0,75
8	-	+	29,0	28, 65	0,35
9	0	+	50,0	47, 4	2,6

Пример 5. Требуется определить значение K , которое ожидается при $T = 110^\circ\text{C}$ и $t = 10000$ ч по неполному квадратичному полиному.

Решение. Переведем абсолютное значение температуры в относительную (кодированную) величину

$$\tilde{T} = \frac{T - T_0}{\Delta T} = \frac{110 - 80}{20} = \frac{30}{20} = 1,5$$

и относительное время

$$\tau = \frac{t - t_0}{\Delta t} = \frac{10000 - 5000}{4000} = 1,25.$$

Подставим кодированные значения $\tilde{T}$ и τ в полином (9.9), получим искомое значение $\hat{K}$

$$\begin{aligned}\hat{K} &= 69,9 + 16,5 \cdot (1,5) - 22,5 \cdot (1,25) + 2,25 \cdot 1,5 \cdot 1,25 = \\ &= 69,9 + 24,75 - 28,125 + 4,22 = 70,75\end{aligned}$$

Пример 6. Определить значение прогнозируемого параметра, которое ожидается через $\tau = 0,2$ после последнего измерения. Расчет произвести при минимальном (максимальном) значении фактора x_1 .

Для решения данной задачи вместо x_1 следует подставить в полином минимальное значение $x_1 = -1$, (максимальное значение $x_1 = +1$), и значение $\tau = 1,2$.

Далее расчет значения прогнозируемого полинома производится аналогично примеру 5.

4. МАТЕРИАЛЫ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Полиномиальные модели и их статистическая обработка.
2. Расчёт прогнозирующего параметра на период $\tau = 1,4$ при $x = 1,2$.

3. Графики, построенные с помощью ЭВМ с указанием прогнозирующих кривых.

5. ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Назовите основные цели прогнозирования.
2. Какие задачи решаются на основе прогнозирования ТС?
3. Поясните принципы аналитического и вероятностного прогнозирования.
4. На чем основано прогнозирование методом статистических классификаций?
5. Какое из направлений наиболее эффективно для прогнозирования ТС РЭО и почему?
6. Какие аналитические функции наиболее часто используются для прогнозирования ТС РЭО?
7. Поясните методику построения прогнозирующего однофакторного и многофакторного полиномов.
8. Покажите на примере определение коэффициентов полинома второго порядка по трем и пяти точкам. Как использовать такой полином для определения времени достижения параметром предельного (заданного) значения параметра?

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Солодов, В. С. Надёжность и диагностика транспортного радиооборудования и средств автоматики в примерах и задачах : учеб. пособие по дисциплине «Надёжность и диагностика радиоэлектронного оборудования и средств автоматики» / В. С. Солодов, Н. В. Калитёнков. – М.: МОРКНИГА, 2014. – 298 с.

2. Солодов, В. С. Техническая диагностика радиоэлектронного оборудования и средств автоматики. Ч. 2. : учеб. пособие / В. С. Солодов, Н. В. Калитёнков. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2009. – 209 с. : ил.

Дополнительная

3. Кузнецов, С. Е. Основы технической эксплуатации судового электрооборудования и автоматики : учебник / С. Е. Кузнецов, В. С. Филев – СПб. : Судостроение, 1995. – 448 с. : ил.

4. Солодов, В. С. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / В. С. Солодов. – Мурманск : Изд-во МГТУ, 2012. – 204 с. : ил.

5. Калитёнков, Н. В. Надёжность и диагностика транспортного радиооборудования и средств автоматики : Учеб. пособие / Н. В. Калитёнков, В. С. Солодов. – Москва : МОСКНИГА, 2012. – 521 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

**Значение G -критерия (Кохрена)
(уровень значимости $q = 0,05$)**

n	f_1											
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	144	∞
2	0,9995	0,9750	0,9392	0,9057	0,9772	0,8534	0,8159	0,7880	0,7341	0,8602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6772	0,6333	0,6025	0,5416	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5175	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4384	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4809	0,4447	0,4184	0,3817	0,3368	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4807	0,3974	0,3726	0,3354	0,3154	0,3756	0,2278	0,1883	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3685	0,4362	0,3043	0,2883	0,2462	0,5022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2768	0,2563	0,2326	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2323	0,2541	0,2353	0,3032	0,1655	0,1308	0,1000
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0632	0,0623	0,0682	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167

В таблице: n – число независимых оценок дисперсии; $f_1 = m - 1$ – число степеней свободы каждой дисперсии (здесь m – число параллельных опытов).

Таблица 2

Значения t - критерия (Стьюдента)

	Уровень значимости q										
f	0,8	0,6	0,5	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
1	0,325	0,727	1,000	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,32	636,62
2	0,289	0,617	0,816	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,08	81,599
3	0,277	0,584	0,765	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,641	7,453	12,924
4	0,271	0,569	0,741	0,941	1,633	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	8,610
5	0,267	0,559	0,727	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	6,669
6	0,265	0,553	0,718	0,908	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,953
7	0,263	0,549	0,711	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	5,408
8	0,252	0,546	0,706	0,889	1,397	1,860	2,306	2,898	3,355	3,833	6,041
9	0,261	0,543	0,703	0,883	1,383	1,333	2,262	2,821	3,250	3,690	4,781
10	0,260	0,542	0,700	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,587
...	...										
60	0,254	0,527	0,679	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,916	3,460
120	0,254	0,526	0,677	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	2,860	3,374
00	0,253	0,524	0,674	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,291

Таблица 3

**Значения F -критерия (Фишера)
(уровень значимости $q = 0,05$)**

f_2	f_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51

16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45
----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

.